Matematika II

8. Differenciálegyenletek

1) Határozza meg az alábbi szeparábilis de-ek megoldásait:

$y' = 2x$; $y' = 2\sin x$; $y' = \frac{1}{x+1}$; $y' = \operatorname{ctg} x$;

$y' = 2y$; $y' = e^{y}$; $y' = 5\operatorname{tg} y$; $y'y^2 = 1$;

$y' = \frac{x}{y}$; $y' = -\frac{y}{x}$; $y' = 7xy$; $xy' + y = 1$;

$xy' - y = 0$; $y' = 4x\sqrt{y}$; $y' - 2y\operatorname{ctg} x = 0$; $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$;

$y' = \frac{4y}{x(y-3)}$; $xy' + y = y^2$; $y(9+4x^2)y' = 1$;

$xy' + y = y^2$, $y(1) = \frac{1}{2}$; $y = y' \ln y$, $y(2) = 1$;

2) Határozza meg az alábbi elsőrendű lin. de-ek mo-ásait:

$y' + 3y = e^{-x}$; $y' - \frac{y}{x} = xe^{x}$; $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$;

$y' - y = \sin x$; $y' - y = x^2 + 2$; $y' - y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$;

$y' \sin x - y\cos x = -1$;

3) Használjon speciális helyettesítéseket:

$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$; $x \sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x} + xy'\cos\frac{y}{x} = 0$;

$y' = x + y$; $y' = 2y + x + 1$; $y' = (x+y-4)^2$

4) Oldja meg az alábbi másodrendű de-eteket:

$(1+\sin x)^2 y'' + \cos x = 0$; $y'' = y' + x^2 - 2x$; $y'' - 4y' + 4 = 0$;

$y'' - 2y' + y = 0$; $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y'' + y' + y = 0$;

$y'' - y' - 6y = 0$; $y'' - 3y' - 10y = 0$; $y'' - 7y' + 6y = 0$; $y'' + 3y' - 2y = 0$;

$4y'' + 4y' + 37y = 0$; $y'' - 8y' + 16y = 0$; $4y'' - 12y' + 9y = 0$;

5) Egyéb feladatok:

$x^3\,dy + (y+1)^2\,dx = 0$; $(1+2y)\,dx = (x^2-4)\,dy$; $e^{y-x}\,dx + e^{x-y}\,dy = 0$;

Matematika II

Differenciálegyenletek

Szeparábilis egyenletek:

$$y' = f(x)\,g(y) \iff \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,dt \Big|_{y=y(x)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

$$y' = f(x)\,g(y) \iff \frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y) \Rightarrow \frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$

Lineáris de-ek:

(LH) $\quad y' = f(x)\,y \iff y = C e^{\int f(x)\,dx}$

(LIH) $\quad y' = f(x)\,y + g(x) \iff y = y_H + y_p =$

$$= C e^{\int f(x)\,dx} + C(x)\, e^{\int f(x)\,dx}$$

$$\left(c'(x) = g(x)\, e^{-\int f(x)\,dx} \iff C(x) = \int \left[g(x)\, e^{-\int f(x)\,dx} \right] dx \right)$$

Homogén fokszámú egy:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \text{ hely.: } \frac{y}{x} = u \iff y = xu \Rightarrow y' = u + xu' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u + xu' = f(u) \Rightarrow u' = \frac{1}{x}\left[f(u) - u\right] \overset{\text{mo.}}{\Rightarrow} y = xu$$

Az $y' = f(ax + y + c)$ egyenlet: helyettesítéssel:

$$ax + by + c = u \iff y = \frac{1}{b}u - \frac{a}{b}x \Rightarrow y' = \frac{1}{b}u - \frac{a}{b} \Rightarrow u' = b\,f(u) + a$$

Másodrendű de-ek:

- $y'' = f(x) \Rightarrow y' = \int f(x)\,dx + C_1 \Rightarrow y = \int \left[\int f(x)\,dx + C_1 \right] dx + C_2$
- $F(x, y', y'') = 0$: $y' = u$ hely. $\Rightarrow F(x, u, u') = 0$ elsőrendű
- $F(y, y', y'') = 0$: $y' = p(y)$ hely. $\Rightarrow y'' = p'(y)\,y' \Rightarrow p'(y)\,p \Rightarrow$ 1.r.
- $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$: $y = e^{\lambda x}$ alakban kes. mo. $\Rightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$

$\to \lambda_1 \neq \lambda_2$ valós gyökök: $\quad y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ a mo.,

$\to \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ — " — : $\quad y = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x}$ a mo.,

$\to \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ komplex gy.: $\quad y = e^{\alpha x}\left[C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x \right]$