Lajkó Károly

MATEMATIKA II.

(analízis mérnököknek)

Nyíregyházi Főiskola
2010.

MATEMATIKA II.

1. Bevezetés

A Matematika I. tárgyban, a valós számokról korábban tanultak „összefoglalásaként", megadták a valós számok halmazának ($\mathbb{R}$) axiomatikus felépítését, így ismerik:

- az alapműveletek tulajdonságait; a természetes-, a racionális- és irracionális számok halmazát;
- a rendezést (egyenlőtlenséget) $\mathbb{R}$-ben, a korlátosság fogalmát;
- az x valós szám abszolútértékét és annak tulajdonságait;
- az x és y valós számok $d(x,y) = |x-y|$ távolságát;
- az a valós szám $r>0$ sugarú $K(a,r) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x,a) < r\}$ nyílt környezetét
- a hatványozás és gyökvonás azonosságait;
- az egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásának módszereit;
- a $+\infty$ és $-\infty$ szimbólumokat és az $\mathbb{R}_b = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ halmazt, a bővített valós számok halmazát.

(Bővebben ld.: Gazdasági Matematika I. (elektronikus) jegyzet.)

Ugyancsak szerepelt a Matematika I.-ben a halmazok, relációk és függvények témaköréről tanultak összefoglalása és kiegészítése:

- a függvény, az értelmezési tartomány és értékkészlet, halmaz képe, függvény leszűkítése;
- függvény invertálhatósága és inverze, függvények összetétele;
- a legfontosabb függvények:
  konstans-, identikus-, lineáris-, abszolútérték-, polinom-, hiperbola-, racionális tört-, négyzetgyök-, n-edik gyök-, exponenciális-, logaritmus-, sin, cos, tg, ctg és utóbbiak inverz-függvényei.

(Ld. G.M.I. és G.M.I. összefoglalás a „faliújságon".)

2. Sorozatok és sorok (G.M. I. 33.–48.)

1. def. Egy $f: N \to \mathbb{R}$ függvényt $\mathbb{R}$-beli sorozatnak nevezünk. A sorozat n-edik elemét (tagját) $f(n)$ vagy a_n (v. x_n, vagy más), az elemek halmazát $\{a_n\}$ (v. $\{x_n\}$ v. más), míg a sorozatot $\langle a_n \rangle$ (v. $\langle x_n \rangle$ v. más) jelöli.

Pl. 1) $\langle \frac{1}{n} \rangle$ tagjai: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$;

2) $\langle n \rangle$ tagjai: $1, 2, 3, \dots, n, \dots$;

3) $\langle a_n \rangle$ számtani sorozat, ha $a_n = a_1 + (n-1)d$;

4) $\langle b_n \rangle$ mértani sorozat, ha $b_n = b_1 q^{n-1}$.

2. def. $\langle a_n \rangle$ korlátos, ha $\{a_n\}$ korlátos ($\exists k, K$, $k \le a_n \le K$). $\langle a_n \rangle$ alulról (felülről) korlátos, ha $\{a_n\}$ alulról (felülről) korlátos ($\exists k$ (K), $k \le a_n$ ($a_n \le K$) $\forall n \in N$).

Pl. $\langle \frac{1}{n} \rangle$ korlátos, $\langle n \rangle$ alulról korlátos, felülről nem korl.

3. def. $\langle a_n \rangle$ monoton növekedő (csökkenő), ha $\forall n \in N$-re $a_n \le a_{n+1}$ ($a_n \ge a_{n+1}$). $\langle a_n \rangle$ szigorúan monoton (növekedő ill. csökkenő), ha $\forall n \in N$-re $a_n < a_{n+1}$ ill $a_n > a_{n+1}$.

Pl. $\langle \frac{1}{n} \rangle$ szig. mon. csökkenő; $\langle n \rangle$ szig. mon. növekedő; $\langle (-1)^n \rangle$ nem. mon.

4. def. $\langle a_n \rangle$ konvergens, ha $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n(\varepsilon) \in N$, hogy $\forall n \ge n(\varepsilon)$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$. a-t $\langle a_n \rangle$ határértékének nevezzük. Jelölés: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ vagy $a_n \to a$.

Pl. 1) $\langle c \rangle$ konvergens és $\lim_{n\to\infty} c = c$ ($c \to c$).

2) $\langle \frac{1}{n} \rangle$ konvergens és $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ($\frac{1}{n} \to 0$) (nullsorozat).

Megjegyzés: Környezetes átfogalmazás is van.

5. def. $\langle a_n \rangle$ divergens, ha nem konvergens. (pl. $\langle (-1)^n \rangle$)

6. def. $\langle a_n \rangle$ $+\infty$-hez ($-\infty$-hez) konvergál, ha $\forall M \in \mathbb{R}$-re $\exists n(M) \in N$, $\forall n \ge n(M)$-re $a_n > M$ ($a_n < M$) teljesül.

Pl. $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$; $\lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty$.

1. Tétel. Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens, akkor egy határértéke van.

2. Tétel. Ha $\langle a_n \rangle$ konvergens, akkor korlátos. (Fordítva általában nem igaz: $\langle (-1)^n \rangle$ korl., de nem konv.)

6. def. Ha $\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ adott, úgy $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$ összege (különbsége), λ-szorosa, szorzata és hányadosa:
$\langle a_n \rangle \pm \langle b_n \rangle \doteq \langle a_n \pm b_n \rangle$; $\lambda \langle a_n \rangle = \langle \lambda a_n \rangle$; $\langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle = \langle a_n \cdot b_n \rangle$,
$\dfrac{\langle a_n \rangle}{\langle b_n \rangle} = \left\langle \dfrac{a_n}{b_n} \right\rangle$ $(b_n \neq 0)$.

3. Tétel. Ha $a_n \to a$, $b_n \to b$, $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor
$a_n \pm b_n \to a \pm b$; $\lambda a_n \to \lambda a$; $a_n b_n \to ab$; $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$ $(b_n \neq 0, b \neq 0)$.

4. Tétel. a) Ha $|a_n| \to +\infty$ $(a_n \neq 0) \Rightarrow \dfrac{1}{a_n} \to 0$.
b) Ha $a_n \to 0$ $(a_n \neq 0) \Rightarrow \left|\dfrac{1}{a_n}\right| \to +\infty$.

5. Tétel. Ha $x \in \mathbb{R}$ adott, akkor az $\langle x^n \rangle$ sorozat
a) $|x| < 1$ esetén konvergens és $\lim_{n \to \infty} x^n = 0$ $(x^n \to 0)$.
b) $|x| > 1$ esetén divergens.
c) $x > 1$ esetén $x^n \to +\infty$ $\left(\lim_{n \to \infty} x^n = +\infty\right)$

6. Tétel. Az $\left\langle \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\rangle$ sorozat konvergens (határértéke az e szám).

7. def. Ha $\langle a_n \rangle$ adott sorozat, akkor azt az $\langle S_n \rangle$ sorozatot, melyre $S_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ végtelen sornak nevezzük. S_n-t a sor n-edik részletösszegének, a_n-t a sor n-edik tagjának nevezzük. Jelölés: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ v $\sum a_n$
Ha adott $a_0 \in \mathbb{R}$ is és $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, úgy $\langle S_n \rangle$ a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor.

Pl. Mértani sor: $a_n = aq^n$; $S_n = \sum_{k=0}^{n} aq^k$, a sor: $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$

8. def. $\sum a_n$ konvergens, ha $\langle S_n \rangle$ konvergens.

7. tétel Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $a_n \to 0$ (fordítva?).

Pl. 1) Ha $|q| < 1$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \dfrac{a}{1-q}$.
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ nem konvergens (divergens), de $\dfrac{1}{n} \to 0$.

9. def. A $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, ha $\sum |a_n|$ konvergens.

8. Tétel. Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens, akkor konvergens.

Sorok konvergenciájára (ill. abszolút konvergenciájára) több kritériumot (v. elegendő feltételt) ismerünk. (ld. GMI.) Itt most csak egyet adunk meg.

9. Tétel (D'Alembert féle hányados kritérium). Legyen adott a $\sum a_n$ sor, hogy $a_n \neq 0$.

a) Ha $\exists\ 0 \leq q < 1$ és $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n \geq n_0$-ra $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$, akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens (így konvergens is).

b) Ha $\forall\ n \geq n_0$-ra $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, akkor $\sum a_n$ divergens.

Pl. A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ sor $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén abszolút konvergens, így konvergens is, hiszen $a_n = \frac{x^n}{n!}$ választással

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0,$$

ami adja, hogy $\exists\ n_0$, hogy $\forall\ n \geq n_0$-ra $\frac{|x|}{n+1} < \frac{1}{2} = q$.

10. def. Ekkor $\forall\ x \in \mathbb{R}$ esetén az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt definiáljuk úgy, hogy $f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Ezt a függvényt exponenciális függvénynek nevezzük. Tehát $\exp(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Belátható, hogy $\exp(x) = e^x$ $\left(e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$, így értelmes az $e^x \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$ definíció, azaz $e^x \doteq \exp(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

3. Valós függvények

Ismeretes, hogy valós függvényen egy olyan hozzárendelést (leképezést) értünk, amely egy $A \subseteq \mathbb{R}$ nemüres halmaz minden eleméhez egy $B \subseteq \mathbb{R}$ nemüres halmaz pontosan egy elemét rendeli.

Ha f jelöli a függvényt, úgy $x \in A$-ra $y = f(x) \in B$ az x képe, f helyettesítési értéke.

$f: A \to B$ azt jelöli, hogy f A-t B-be képezi. $\{(x, f(x))\}$ az f gráfját (esetleg magát a függvényt) jelöli.

$D_f \doteq \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = y\}$ f értelmezési tartománya.

$R_f \doteq \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D_f,\ f(x) = y\}$ f értékkészlete.

Ha $f: A \to B$ adott fv., $C \subset A$, úgy $f(C) \doteq \{y \in B \mid \exists x \in C,\ y = f(x)\}$ a C képe f-re nézve, míg $f|_C = \{(x, f(x)) \mid x \in C\}$ az f leszűkítése C-re.

Az $f: A \to B$ fv. inverzén az $f^{-1} = \{(y, f^{-1}(x)) \mid y = f(x)\}$ halmazt értjük. f invertálható, ha f^{-1} is függvény.

Ha adottak az $f: A \to B$ és $g: B \to C$ függvények, akkor az $F(x) = (g \circ f)(x) \doteq g(f(x))$ $(x \in A)$ fv-t összetett függvénynek nevezzük.

A továbbiakban az $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jelölést használjuk a valós függvényekre, ahol $E = D_f$.

Ismétlésnek tekintjük az alábbi függvényeket:

$f(x) = c$ $(x \in \mathbb{R})$ (konstans fv.); $f(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ (identikus fv.); $f(x) = ax + b$ $(x \in \mathbb{R})$ (lineáris fv.); $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ (abszolútérték fv.); $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$, ..., $f(x) = x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ (hatvány fv-ek); $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(x \in \mathbb{R})$ (a másodfokú fv.); $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ $(x \in \mathbb{R})$ (n-edfokú polinom fv.); $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ (egyenlő oldalú hiperbola); $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ $\left(x \neq -\frac{d}{c}\right)$ (racionális tört fv.); $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ (négyzetgyök fv.); $f(x) = \sqrt[n]{x}$ $\left(\begin{array}{l} x \geq 0 \text{ ha } n \text{ páros} \\ x \in \mathbb{R} \text{ ha } n \text{ páratlan} \end{array}\right)$ (n-edik gyök fv.); $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ $(x \geq 0)$, $f(x) = \exp(x) = e^x$ (exponenciális fv.). A trigonometrikus fv-ek, ill. bizonyos értelemben vett inverzeik.

a) Fontosak az alábbiak (ld. GM I. 50–51. o)

1. def. Az $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv. korlátos, ha $f(E)$ korlátos, azaz $\exists\ k, K \in \mathbb{R}$, hogy $k \le f(x) \le K \quad \forall x \in E$. f alulról (felülről) korlátos, ha $f(E)$ alulról (felülről) korlátos, azaz $\exists k$, $k \le f(x)\ (x \in E)$ ill. $\exists K$, $f(x) \le K\ (x \in E)$.
A $\sup(f(E))$, $\inf(f(E))$ számokat f pontos felső ill. pontos alsó korlátjának (supremum, infimum) nevezzük.
Ha $\exists\ x_1, x_2 \in E$, $\sup f(E) = f(x_1)$, $\inf f(E) = f(x_2)$, akkor ezeket f abszolút maximumának, ill. minimumának nevezzük

2. def. Az $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv.-nek $x_0 \in E$-ben helyi (lokális) maximuma ill. minimuma van, ha $\exists\ K(x_0, \delta)$ környezet, hogy $\forall\ x \in K(x_0, \delta) \cap E$-re $f(x) \le f(x_0)$ ill. $f(x) \ge f(x_0)$ teljesül.
3. def. Az $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv. monoton növekedő (csökkenő), ha $\forall\ x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$-re $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$ teljesül. f szigorúan monoton növekedő (csökkenő), ha $\forall\ x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ teljesül.

4. def. Ha $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $x \in E$-re $-x \in E$ is igaz, továbbá $f(-x) = f(x)$ ill. $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in E$-re, akkor f-et párosnak ill. páratlannak nevezzük.

b) Valós függvények folytonossága (ld. GM. I. 52.–56. o.)

1. def. Az $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv. folytonos $x_0 \in E$-ben, ha $\forall\ \langle x_n \rangle$ $(x_n \in E)$ sorozatra, melyre $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$.
f jobbról (balról) folytonos $x_0 \in E$-ben, ha $\forall$ x_0-hoz jobbról (balról) tartó $\langle x_n \rangle$ E-beli sorozatra $\Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$.
Ha f nem folytonos $x_0 \in E = D_f$-ben, akkor azt mondjuk, hogy szakadása van x_0-ban és x_0 szakadási helye f-nek.
Pl. az $f_1(x) = c$ $(x \in \mathbb{R})$, $f_2(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ fv.-ek $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$-ben folytonosak.

2. *def.* Az $f, g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények összegén, szorzatán és $g \neq 0$ esetén a hányadosán az $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ ill. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ $(x \in E)$ függvényeket, míg $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén f λ-szorosán a $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ $(x \in E)$ függvényt értjük.

1. Tétel. Ha az $f, g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv-ek folytonosak $x_0 \in E$-ben, akkor $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ és λf is folytonosak x_0-ban.

· Alkalmazás: $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(x \in \mathbb{R})$ folytonos $\forall$ $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén.

2. tétel. Ha $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : f(E) \to \mathbb{R}$ olyanok, hogy f folytonos $x_0 \in E$-ben, g folytonos $f(x_0) \in f(E)$-ben, akkor a $F = g \circ f$ összetett függvény is folytonos x_0-ban.

3. *def.* Ha az $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv. $\forall$ $x_0 \in E$-ben folytonos akkor azt mondjuk, hogy f folytonos függvény.

Megjegyzés. Belátható, hogy az ismertnek tekintett fv.-ek mindegyike folytonos az értelmezési tartománya bármely pontjában, azaz folytonos fv.-ek.

c) Valós függvények határértéke (ld. GR. I. 57.–64. o)

1. *def.* Legyen az $f : E \subseteq \mathbb{R}$ fv. az x_0 egy $K(x_0, \delta)$ környezetében (esetleg x_0-t kivéve) értelmezett. Azt mondjuk, hogy f-nek x_0-ban az $A \in \mathbb{R}$ szám a határértéke, ha $\forall$ olyan $\langle x_n \rangle$ sorozatra, hogy $x_n \in D_f \setminus x_0$ és $x_n \to x_0$ $\Rightarrow$ $f(x_n) \to A$.

Jelölés $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $f(x) \to A$, ha $x \to x_0$

f-nek x_0-ban a határértéke $+\infty$ $(-\infty)$, ha $\forall$ $\langle x_n \rangle$-re, hogy $x_n \to x_0$ $\Rightarrow$ $f(x_n) \to +\infty$ (ill $f(x_n) \to -\infty$).

Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Ha $\forall$ olyan D_f-beli $\langle x_n \rangle$ sorozatra, hogy $x_n > x_0$ ($v.\ x_n < x_0$) és $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to A$ ($v +\infty, v -\infty$), akkor azt mondjuk, hogy f-nek x_0-ban A (vagy $+\infty$, vagy $-\infty$) a jobboldali (baloldali) határértéke. Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$ ($v+\infty, v-\infty$); $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A$ ($v+\infty, v-\infty$).

Pl. 1) $f(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$) esetén $\forall\, x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) esetén $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$.

Megjegyzés: A definíció a végesben (x_0-ban) vett véges (A) vagy végtelen ($+\infty, -\infty$) határértéket, ill. jobboldali v. baloldali határértéket értelmezi.

2. def. Legyen $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan fv., hogy E felülről (ill. alulról) nem korlátos. Azt mondjuk, hogy f határértéke $+\infty$-ben (ill. $-\infty$-ben) az $A \in \mathbb{R}$ szám (vagy $+\infty$, vagy $-\infty$), ha $\forall$ E-beli $\langle x_n \rangle$ sorozatra, melyre $x_n \to +\infty$ (vagy $x_n \to -\infty$) $\Rightarrow$ $f(x_n) \to A$ (vagy $+\infty$, vagy $-\infty$).

Jelölésben: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ ($v+\infty, v-\infty$),

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ ($v.+\infty, v.-\infty$).

Megjegyzés. Itt a végtelenben vett határérték (összesen 6) esete szerepel.

Pl. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

1. Tétel. Ha $f, g: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyanok, hogy $x_0 \in \mathbb{R}$-re $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ és $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, akkor $\Rightarrow$
$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$; $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) g(x)] = A \cdot B$; $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ (ha $g \neq 0$ és $B \neq 0$); $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda A$.

Az állítás igaz akkor is, ha x_0-helyett $+\infty$ vagy $-\infty$ szerepel.

2. <u>tétel</u>. Ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ (v. $-\infty$), akkor
$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = +\infty$ (v. $-\infty$); $\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)] = +\infty$;
$\lim_{x\to x_0}[c f(x)] = +\infty$ (ill. $-\infty$), ha $c>0$; $\lim_{x\to x_0}[c f(x)] = -\infty$ (ill. $+\infty$), ha $c<0$.

3. <u>tétel</u>. Ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (ill. $-\infty$) és $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$, akkor
$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = +\infty$ (ill. $-\infty$); $\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)] = \begin{cases} +\infty(-\infty), \text{ ha } A>0 \\ -\infty(+\infty), \text{ ha } A<0 \end{cases}$;

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty(-\infty), \text{ ha } A>0 \\ -\infty(+\infty), \text{ ha } A<0 \end{cases}$; $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)} = 0$; $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0$.

<u>Megjegyzés</u>: Az utóbbi két tétel is érvényben marad, ha $x_0 = +\infty$ v. $x_0 = -\infty$.

A fontosabb határértékek szerepelnek a kiadott gyakorlati anyagokban (ld. 2. feladatsor).

c) <u>További elemi függvények</u> (ld. GMI 68.-72.o)

A sorok vizsgálatánál tekintettük (bevezettük) az
$e^x = \exp(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $(x\in\mathbb{R})$ <u>exponenciális függvényt</u>.
Megmutatható, hogy ez folytonos és szigorúan mon. növ. fv., így $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ invertálható és inverzét az $\ln:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ (<u>természetes alapú</u>) <u>logaritmus</u> fv-nek nevezzük. Ez is folytonos és szigorúan monoton növekedő.
$\exp_a x = \exp(x\ln a)$ $(x\in\mathbb{R})$ $(a>0, a\neq 1)$ az <u>a-alapú exp. fv.</u>, ennek inverze az $\log_a:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fv. Mindkettő folytonos.
A $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$; $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ és $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ is konvergensek $\forall x\in\mathbb{R}$, azok rendre a <u>cos, sin, ch és sh</u> fv-eket definiálják $\mathbb{R}$-en. Ezen fv-ek is folytonosak.

4. Differenciálszámítás (valós függvényekre)

(GM I. 73. – 93.)

a) Alapfogalmak

1. def. Legyen $\langle a,b\rangle$ egy nyílt v. zárt intervallum, $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ adott (valós) fv. A

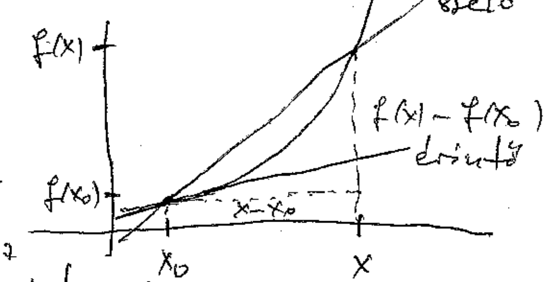
(1) $$\varphi(x,x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad (x\neq x_0,\ x, x_0 \in \langle a,b\rangle)$$

szerint. def. φ függvényt az f x, x_0-hoz tartozó differenciahányados függvényének nevezzük.

2. def. $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható az $x_0 \in \langle a,b\rangle$ pontban, ha $\exists$ a

(2) $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

véges határérték. Ezt az f x_0-beli differenciálhányadosának (deriváltjának) nevezzük.



Geometriai tartalom:
φ az f szelőjének meredeksége
$f'(x_0)$ a (szelők határhelyzetének) az érintő iránytangense (meredeksége)

Ha $\exists$ $f'(x_0)$, úgy az $\boxed{y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \quad (x\in\mathbb{R})}$ egyenest az f görbéje $(x_0, f(x_0))$-beli érintőjének nevezzük.

Megjegyzés: egyoldali derivált ill. félérintő is értelmezhető.

3. def. Ha f $\langle a,b\rangle$ minden pontjában differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy f differenciálható $\langle a,b\rangle$. Ekkor a (2) szerint def $f':\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ fv-t az f differenciálhányados fv-ének (derivált függvényének) nev.

Egy fizikai jelentés: A $s(t)$ útfüggvény deriváltja az $v(t)$ sebesség függvény. $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ az átlagsebesség, $s'(t_0)$ a pillanatnyi sebesség.

Más jelölés: $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ ill. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Megjegyzés: Ha f diff'ható x_0-ban, úgy ott folytonos is.

b) Elemi függvények deriváltfüggvényei 1. rész.

Ld. „táblázat". Az egyszerűbb bizonyítások:

- $f(x) = C \ (x \in \mathbb{R}) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{C - C}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0$
  $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, így $\exists f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x) = (C)' = 0 \ (x \in \mathbb{R})$.
- $f(x) = x \ (x \in \mathbb{R}) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \ \forall (x_0 \in \mathbb{R})$
  $\Rightarrow \exists f'(x) = (x)' = 1 \ (x \in \mathbb{R})$
- $f(x) = x^n \ (x \in \mathbb{R}) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + \dots + x_0^{n-1}) =$
  $= n x_0^{n-1} \ \forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists f'(x) = (x^n)' = n x^{n-1} \ (x \in \mathbb{R})$.
- Ha $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ (x \in]-\varrho, \varrho[) \Rightarrow \exists f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \ (x \in]-\varrho, \varrho[$,
  (az un. hatványsorok differenciálhatósági tétele)
  Ebből jön, hogy: $\boxed{(e^x)' = e^x}$, $(\sin x)' = \cos x$, ...

c) Differenciálhatóság és műveletek

1. Tétel. Ha $f, g : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ differenciálhatók $x_0 \in \langle a, b \rangle$-ban, úgy $f + g$, $f \cdot g$ és $g(x_0) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is diff-ató x_0-ban és

$$(3) \begin{cases} (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0); \ (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0); \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)} \end{cases}$$

A biz elég egyszerű.

Megjegyzés: Ha f, g $\forall x \in \langle a, b \rangle$-re differenciálhatók, úgy (3)-ban x_0 helyett x írható, illetve szokásosak a következők is:

$$\boxed{[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x); \ [f(x) g(x)]' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x); \ \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}}$$

Következmények:

$[c f(x)]' = c f'(x)$; $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$; $\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$;

$[\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x)]' = \lambda_1 f_1'(x) + \dots + \lambda_n f_n'(x)$.

$\left[\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right]' = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$; $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ diff-ató, ha $Q_m(x) \neq 0$.

Pl. ld. 4. feladatsor

2. Tétel (az összetett fv. differenciálhatósága)

Ha $g : \langle c,d \rangle \to \mathbb{R}$, $f : \langle a,b \rangle \supseteq g(\langle c,d \rangle) \to \mathbb{R}$ olyanok, hogy $\exists\, g'(x_0)$ $(x_0 \in \langle c,d \rangle)$ és $\exists\, f'(y_0)$ $(y_0 = g(x_0))$, akkor a $F = f \circ g$ $(F(x) = f(g(x)))$ összetett fv. is diff-ható x_0-ban

(ÖD) $\boxed{F'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)}$

Ha a feltételek $\forall\, x \in \langle c,d \rangle$-re teljesülnek, így:

(ÖD*) $\boxed{\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x))\, g'(x) \quad (x \in \langle c,d \rangle)}$

írásmód is használható.

Pl. $\left[\exp_a(x)\right]' = \left[a^x\right]' = \left[\exp(x \ln a)\right]' = \exp(x \ln a) \ln a = a^x \ln a$

3. Tétel (az inverz fv. differenciálhatósága)

Ha $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ szig. mon és foly és $\exists\, f'(x_0) \neq 0$, akkor f^{-1} diff-ható $f(x_0)$-ban és

$\boxed{(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}}$ ill. $\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \quad (y_0 = f(x_0))}$

$\boxed{(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$

Pl. $(\ln x)' = (\exp^{-1}(x))' = \dfrac{1}{\exp'(\ln x)} = \dfrac{1}{\exp(\ln x)} = \dfrac{1}{x} \quad (x>0)$

$\left[\log_a(x)\right]' = \left[\exp_a^{-1}(x)\right]' = \dfrac{1}{\exp_a'(\log_a x)} = \dfrac{1}{\exp_a(\log_a x) \ln a} = \dfrac{1}{x \ln a}$

2+3. $\Rightarrow$ $(x^\mu)' = \left[\exp(\mu \ln x)\right]' = \exp(\mu \ln x) \cdot \dfrac{\mu}{x} = x^\mu \dfrac{\mu}{x} = \mu x^{\mu-1}$

$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x>0)$

$(\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \dfrac{1}{n} \sqrt[n]{x^{1-n}} \quad (x>0)$

1+2+3. $\Rightarrow$ $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

d) Magasabbrendű deriváltak

1. Def. Legyen $f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ adott.

- f 0-edik deriváltja: $\boxed{f^{(0)} = f}$
- Ha $n \in \mathbb{N}$ esetén $\exists\, f^{(n-1)}: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ és differenciálható, akkor f n-edik deriváltja: $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.
- Ha $\forall\, n$-re $\exists\, f^{(n)}$, akkor f akárhányszor diff-ható.

Pl. $(x^n)^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)\, x^{n-k}$ $(x \in \mathbb{R})$, ha $k < n$;

$(x^n)^{(n)} = n!$ $(x \in \mathbb{R})$; $(x^n)^{(k)} = 0$ $(x \in \mathbb{R})$, ha $k > n$.

$\exp^{(n)}(x) = \exp x$ $\left((e^x)^{(n)} = e^x\right)$ $(x \in \mathbb{R})$ $\forall\, n$-re

$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x \\ -\sin x \\ -\cos x \\ \sin x \end{cases}$ $(\cos x)^{(n)} = \begin{cases} -\sin x \\ -\cos x \\ \sin x \\ \cos x \end{cases}$ $(\ln x)^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}$ $(n \ge 2)$

Tétel. Ha $f, g: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ n-szer differenciálható, akkor $\forall\, x$-re:

$$\begin{cases} (c \cdot f)^{(n)}(x) = c\, f^{(n)}(x) \;;\; (f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \;; \\ \boxed{(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x)\, g^{(n-i)}(x) = \binom{n}{0} f(x) g^{(n)}(x) + \binom{n}{1} f'(x) g^{(n-1)}(x) + \dots + \binom{n}{n} f^{(n)}(x) g(x)} \end{cases}$$

(Leibniz-szabály)

2. Def. $f:]p,q[\to \mathbb{R}$ akárhányszor differenciálható, úgy a

(TS) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ $(x, a \in]p,q[)$

sort az f fv. a-hoz tartozó Taylor-sorának, ~~neo.~~ míg a

(TP) $\displaystyle T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ $(x, a \in]p,q[)$

polinomot f a-hoz tartozó n-edrendű Taylor-polinomjának nev.

Ha $0 \in]p,q[$, úgy a $a=0$-hoz tartozó Maclaurin-sort ill. polinomot kapjuk.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ ill. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ alakban.

Megjegyzések 1) Minden konvergens hatványsor összegfv.-ének T-sora.

2) $f: K(a,r) \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $n \in \mathbb{N}$-re $\exists\, f^{(n)}$, akkor $\forall\, x \in K(a,r)$-re $\exists\, \xi(x) \in K(a,r) \setminus \{a\}$, hogy $\forall\, x \in K(a,r)$-re

$\boxed{f(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!}(x-a)^n}$ (Taylor-tétel)

2) Ha $R_n(x) \to 0$ (Pl. ha $|f^{(k)}(x)| \le M$ ($\forall\, x$ és $n \in \mathbb{N}$)) $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = \text{(TS)}}$

Pl. Taylor- és Maclaurin-sorok meghatározása

e) Differenciálható fv.-ek vizsgálata

1. tétel. (a lokális szélsőérték szükséges feltétele)
Ha az $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ fv.-nek $x_0 \in]a,b[$-ben lokális szélsőértéke van és $\exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0)=0$.
Ott lehet tehát lok. szé., ahol $f'(x_0)=0$

Pl. 1) $f(x)=x^2$ $(x\in\mathbb{R})$-nek $x_0=0$-ban lok. min. van és
$f'(x)=2x$ $(x\in\mathbb{R})$ miatt valóban $f'(0)=0$.

2) $f(x)=x^3$ $(x\in\mathbb{R})$-nek 0-ban nincs lok. szé-e, de $f'(x)=3x^2 \Rightarrow f'(0)=0$.
(tehát a feltétel általában nem elegendő!)

2. tétel. (a monotonitás elegendő feltétele)
Ha $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható, akkor
a) $f'(x)\geq 0$ $(x\in\langle a,b\rangle) \Rightarrow f$ monoton növekedő $\langle a,b\rangle$-n;
b) $f'(x)\leq 0$ $(x\in\langle a,b\rangle) \Rightarrow f$ monoton csökkenő $\langle a,b\rangle$-n;
c) $f'(x)=0$ $(x\in\langle a,b\rangle) \Rightarrow f(x)=C$ $(x\in\langle a,b\rangle)$, azaz f konstans

(Fordítva is igaz!)

Pl. $f(x)=5x+2$ $(x\in\mathbb{R}) \Rightarrow \exists f'(x)=5\geq 0 \Rightarrow f$ mon. növ
$f(x)=x^2-4x+7$ $(x\in\mathbb{R}) \Rightarrow \exists f'(x)=2x-4$ és
$f'(x)=2x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2 \Rightarrow f$ mon. növ. $[2,+\infty[$-en,
$f'(x)=2x-4\leq 0 \Leftrightarrow x\leq 2 \Rightarrow f$ mon. csökk $]-\infty,2]$-n.

Vizsgálható a szigorú monotonitás is, pl. ha
$f'(x)\geq 0$ $(x\in\langle a,b\rangle)$ és $\nexists \langle c,d\rangle \subset \langle a,b\rangle$, hogy itt $f'(x)=0 \Rightarrow f$ szig. mon. növ.

3. tétel (a lokális szé. egy elégséges feltétele)
$f:]x_0-r, x_0+r[\to \mathbb{R}$ differenciálható, hogy $f'(x_0)=0$ és
a) $f'(x)\geq 0$ $(x\in]x_0-r, x_0])$ és $f'(x)\leq 0$ $(x\in [x_0, x_0+r[) \Rightarrow x_0$-ban lok. max. van;
b) $f'(x)\leq 0$ $(x\in]x_0-r, x_0])$ és $f'(x)\geq 0$ $(x\in [x_0, x_0+r[) \Rightarrow x_0$-ban lok. min. van
(f' előjelet vált x_0-ban!)

4. tétel (a lokális szé. 2. elégséges feltétele)
$f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ diffható $f'(x_0)=0$ és
$\exists f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ x_0-ban lok. max. van;
$\exists f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ x_0-ban lok. min. van

1. def. Az $f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ függvényt konvexnek (konkávnak) nevezzük $\langle a,b \rangle$-n, ha $\forall\, x_1, x_2 \in \langle a,b \rangle$ és $\forall\, p,q \in [0,1], p+q=1$ esetén

$$f(px_1+qx_2) \le pf(x_1)+qf(x_2) \quad (\text{ill.} \dots \ge \dots)$$

2. def (geometriai 1). Ha $\forall\, x_1, x_2 \in \langle a,b \rangle$, $x_1 < x_2$ esetén a fv. grafjának $(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$ pontjain áthaladó szelő alatt (felett) vannak f grafjának pontjai, akkor f-et konvexnek (konkávnak) nevezzük.

3. def (geometriai 2). Ha $f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható és az érintő pontjai a fv. grafja alatt (ill. felett) helyezkednek el, úgy f-et konvexnek (konkávnak) nev.

5. Tétel. Ha $f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható és

a) f' monoton növekedő $\Rightarrow f$ konvex $\langle a,b \rangle$-n.

b) f' monoton csökkenő $\Rightarrow f$ konkáv $\langle a,b \rangle$-n.

6. Tétel. Ha $f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható és

a) $f''(x) \ge 0 \quad (x \in \langle a,b \rangle) \Rightarrow f$ konvex $\langle a,b \rangle$-n.

b) $f''(x) \le 0 \quad (x \in \langle a,b \rangle) \Rightarrow f$ konkáv $\langle a,b \rangle$-n.

3. Definíció. Az $f: \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ függvénynek $x_0 \in]a,b[$ inflexiós helye ($(x_0, f(x_0))$ inflexiós pontja), ha f konvex (konkáv) $]x_0-\delta, x_0] \subset \langle a,b \rangle$-n és f konkáv (konvex) $[x_0, x_0+\delta[\subset \langle a,b \rangle$-n. (konvex és konkáv ív találkozása)

Definiálhatók az aszimptóták (ld. t. fv. vizsg)

f) A teljes fv. vizsgálat szempontjai (1.–12.)

$f(x) = x^2+x-6 \qquad f(x) = x^3-5x^2-8x+3$

g) Szöveges szélsőérték feladatok 1) 2)

h) L'Hospital-szabály határértékek számítására

f) A teljes függvényvizsgálat szempontjai

1) D_f meghatározása;
2) Paritás, periodicitás vizsgálata;
3) Zérushelyek meghatározása;
4) A határértékek vizsgálata D_f határpontjaiban;
5) Folytonosság vizsgálata, szakadási helyek meghatározása;
6) Differenciálhatóság vizsgálata, f', f''... meghatározása;
7) Monotonitás vizsgálata;
8) Lokális és globális szélsőértékhelyek és szélsőértékek meghatározása;
9) Konvexitás (konkávitás) vizsgálata, inflexiós helyek (és pontok) meghatározása;
10) Aszimptoták meghatározása;
   (Az $x = x_0$ egyenes függőleges aszimptóta, ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, vagy $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty$;
   Az $y = y_0$ egyenes vízszintes aszimptóta, ha $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ vagy $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$.)
11) A függvény ábrázolása;
12) R_f (az értékkészlet) megadása.

h) L'Hospital-szabály

Ha $f, g : K(a,r) \to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad ,$$

akkor létezik-e a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ határérték,

és hogyan számítható ki?

7. Tétel (L'Hospital-szabály). Legyen f és g értelmezett a $K(a,r)\setminus\{a\}$ halmazon (vagy az $]a, a+r[$ vagy $]a-r, a[$ intervallumokon) és itt differenciálható, továbbá $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ és $g(x)\, g'(x) \neq 0$. ($\frac{0}{0}$ alak)

Ha $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, akkor $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ és $= A$.

Pl. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$ és a két fv. differenciálható $\forall x \in \mathbb{R}$. Továbbá $1\cdot x \neq 0$, ha $x \in K(0,r)\setminus\{0\}$ és $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$, így a L'Hospital-szabály miatt $\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Megjegyzések:

1) Ha f és g értelmezési tartománya felülről vagy alulról nem korlátos, úgy a tétel $a = +\infty$ illetve $a = -\infty$ esetén is igaz.

2) Ha az adott feltételek úgy teljesülnek, hogy $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ (v. $-\infty$), úgy is igaz a tétel állítása. ($\frac{\infty}{\infty}$ alak)

3) Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ ($0\cdot\infty$ alak), akkor $f(x)\, g(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ (v. $\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$) átírással alkalmazhatjuk a tételt.

Pl. 1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+1}{5x^2+x+2} = \cdots$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \cdots$

5. Integrálszámítás

a) Primitív függvény, határozatlan integrál

Ha az $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ fv. differenciálható, úgy hozzárendelhető az $f':\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ derivált fv.

Kérdés: $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$-hez létezik-e $F:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $F'=f$?

1. def. Legyen adott az $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény. A $F:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható fv.-t az f primitív függvényének, vagy határozatlan integráljának nevezzük, ha $F'=f$.

Az F fv.-re az $\int f$ jelölést használjuk. $\int f$ meghatározását integrálásnak mondjuk.

$F=\int f$ x helyen felvett értékét $F(x)=\int f(x)dx$ jelöli

(Természetesen lehet a változó t vagy u ... , ekkor $\int f(t)dt$ ...)

Példák: 1) Ha $f(x)=x$ $(x\in\mathbb{R})$, úgy $F(x)=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}$ $(x\in\mathbb{R})$

2) Ha $f(x)=\sin x$ $(x\in\mathbb{R})$, úgy $F(x)=\int \sin x\,dx=-\cos x$ $(x\in\mathbb{R})$

Tétel. Ha $F:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ primitív fv.-e (határozatlan int.-ja) f-nek, úgy $G:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ akkor és csak akkor az, ha $\exists\, C\in\mathbb{R}$, hogy $G(x)=F(x)+C$ $(x\in\langle a,b\rangle)$.

Alapintegrálok (ld. kiadott anyag): egyszerűen ellenőrizhetők.

Fontosabb szabályok (tömörebben ld. kiadott anyag)

1) Ha $f,g:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ esetén $\exists \int f$ és $\int g$, és $p,q\in\mathbb{R}$ adott, akkor $\exists \int (pf+qg)$ és $C\in\mathbb{R}$, hogy $\forall x\in\langle a,b\rangle$-re

$$\boxed{\int [p\,f(x)+q\,g(x)]\,dx = p\int f(x)dx + q\int g(x)dx + C}$$

Pl. 1) $\int (2x^3+3\cos x)\,dx = 2\frac{x^4}{4}+3\sin x + C$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$f, F:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ olyanok, $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ $(x\in\langle a,b\rangle)$, akkor $\exists$ $\boxed{\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C = \frac{1}{a}\int f(t)dt\Big|_{t=ax+b}+C}$

Pl. $\int (3x+5)^3\,dx = \frac{1}{3}\frac{(3x+5)^4}{4} + C$, mert $\int x^3 = \frac{x^4}{4} + c$.

3) Ha $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható, $\alpha \neq -1$, akkor

$$\boxed{\int f^{\alpha}(x)\, f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C} \quad (x\in\langle a,b\rangle)$$

Pl. $\int (3x^2+5)^4\, 6x = \frac{(3x^2+5)^5}{5} + C$, mert $(3x^2+5)' = 6x$;

$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int (\ln x)\frac{1}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$, mert $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

4) Ha $f\ \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható, $f>0$, akkor

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln[f(x)] + C} \quad (x\in\langle a,b\rangle) \quad \left(\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C, \text{ ha } f\neq 0\right)$$

Pl. 1) $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln(\sin x) + C$, ha $x\in\,]0,\pi[$.

2) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln(\ln x) + C$, ha $x>1$.

5) <u>Parciális integrálás szabálya (tétele)</u>:

Ha $f,g:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ differenciálhatók és $\exists \int f'g \Rightarrow \exists \int fg'$ és $\exists\, C\in\mathbb{R}$, hogy

$$\boxed{\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx + C}$$

Pl. 1) $\int \underset{f}{x}\,\underset{g'}{e^x}\,dx = \underset{f}{x}\,\underset{g}{e^x} - \int \underset{f'}{1}\cdot \underset{g}{e^x}\,dx + C = x e^x - e^x + C$

2) $\int \ln x\,dx = \int \underset{g'}{1}\cdot \underset{f}{\ln x}\,dx = \underset{g}{x}\,\underset{f}{\ln x} - \int \underset{f'}{\frac{1}{x}}\cdot \underset{g}{x}\,dx + C = x\ln x - x + C$

<u>Megjegyzés:</u> Ha $P_n(x)$ n-edfokú polinom, úgy az alábbi integrálok a parciális integrálás módszerével megoldhatók:

$\int P_n(x)e^x\,dx$; $\int P_n(x)\sin x\,dx$; $\int P_n(x)\cos x\,dx$; $\int P_n(x)\operatorname{sh} x\,dx$; $\int P_n(x)\operatorname{ch}(x)\,dx$;

$\int P_n(x)\ln x\,dx$; $\int P_n(x)\arcsin x\,dx$; $\int P_n(x)\arccos x\,dx$; $\int P_n(x)\operatorname{arctg} x\,dx$; $\int P_n(x)\operatorname{arcctg} x\,dx$;

6) <u>Helyettesítéses integrálás szabálya (tétele)</u>: Ha $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ és $g:\langle c,d\rangle\to\langle a,b\rangle$ olyanok, hogy $\exists\, g'$ és $\int f$, akkor $\exists \int (f\circ g)g'$ és $C\in\mathbb{R}$, hogy

$$\boxed{\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt\Big|_{t=g(x)} + C} \quad (H)$$

Ha $\exists\, g^{-1}$ is, úgy

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} + C \quad (x\in\langle a,b\rangle)} \quad (H^*)$$

Pl. 1) $\int \underset{g'}{2x} \underset{f\,(g)}{\sin(x^2)}\,dx = \int \underset{f}{\sin t}\,dt\Big|_{t=\underset{g}{x^2}} + C = -\cos(x^2)+C \quad (x\in\mathbb{R});$

2) $\int \underset{f\,(g)}{\cos(\tfrac{1}{2}x)}\,dx = 2\int \underset{f\,(g)}{\cos(\tfrac{1}{2}x)}\cdot \underset{g'}{\tfrac{1}{2}}\,dx = 2\int \cos t\,dt\Big|_{t=\frac{1}{2}x} + C = 2\sin\tfrac{1}{2}x + C$

3) $\int \cos(\tfrac{1}{2}x)\,dx = \int \underset{f}{\cos}(\tfrac{1}{2}\underset{g}{2t})\cdot 2dt\Big|_{t=\frac{1}{2}x} + C = 2\int \cos t\,dt\Big|_{t=\frac{1}{2}x} + C = 2\sin\tfrac{1}{2}x + C$

Ha $\tfrac{1}{2}x = t \Rightarrow x = 2t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2 \Rightarrow dx = 2dt \Rightarrow$

$\int \cos(\tfrac{1}{2}x)\,dx = \int \cos t\cdot 2\,dt\Big|_{t=\frac{1}{2}x} + C = 2\sin\tfrac{1}{2}x + C$

4) $\int \frac{5}{x^2+2x+2} = \int \frac{5}{(x+1)^2+1}\,dx = 5\,\mathrm{arctg}(x+1) + C$

$\int \frac{5}{\underset{t}{(x+1)^2}+1}\,dx = \int \frac{5}{t^2+1}\cdot 1\,dt\Big|_{t=x+1} + C = 5\,\mathrm{arctg}(x+1)$

$x+1 = t \Rightarrow x = t-1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow dx = 1\cdot dt \Rightarrow$

$\int \frac{5}{(x+1)^2+1}\,dx = \int \frac{5}{t^2+1}\cdot 1\cdot dt\Big|_{t=x+1} + C = 5\,\mathrm{arctg}(x+1) + C$

Megjegyzések:

- $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ esetén a $g(t) = \sin t$, $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ helyettesítés.
- $\int R(e^x)\,dx$ esetén a $g(t) = \ln t$ $(t = e^x)$ $(t>0)$ helyettesítés.
- $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ esetén a $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = g^{-1}(x)$, $g(t) = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}$
- $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ esetén a $\boxed{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t} = g^{-1}(x)$, $x = 2\,\mathrm{arctg}\,t$

Ekkor $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$, továbbá

$$\boxed{\sin x} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right]^2+1} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \boxed{\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$\boxed{\cos x} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \boxed{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

segítségével racionális törtfüggvényt kell integrálni

- $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$ visszavezethető

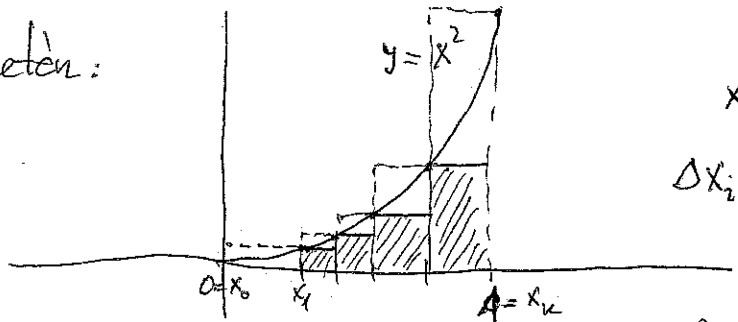
$\int \frac{1}{x-a}\,dx$; $\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx$; $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ kiszámítására.

b) Riemann-integrál

Háttér – geometriai „tartalom" görbe alatti terület közelítése, meghatározása.

Pl. a $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$

halmaz esetén:



$x_n = \frac{i}{n}$ $(i = 0, \dots, n)$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \to \frac{1}{3}$$

$$s = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \to \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \leftarrow s \le T \le S \to \frac{1}{3} \overset{?}{\Rightarrow} \boxed{T = \frac{1}{3}}$$

Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos fv., ahol $[a,b] \subset \mathbb{R}$ zárt int.

1. def. A $P = \{x_i \mid a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n = b\} \subset [a,b]$ halmazt az $[a,b]$ egy felosztásának, x_i-ket a felosztás osztáspontjainak, $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \dots, n)$ a felosztás részintervallumainak, míg $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ mellett a $\|P\| = \sup\{\Delta x_i\}$ számot a felosztás finomságának nevezzük.

A P_2 felosztás finomítése (továbbosztása) P_1-nek, ha $P_1 \subset P_2$.

$\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozata $[a,b]$-nek, ha $\|P_k\| \to 0$.

2. def. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korl. fv., P $[a,b]$ egy felosztása,

$M_i := \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $m_i := \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ (ezek léteznek).

A $s(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$, $S(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$, $\omega(f,P) = S(f,P) - s(f,P)$ számokat az f P-hez tartozó alsó, felső ill. oszcillációs összegének.

míg $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ esetén a $\sigma(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i$ számot az f P-hez és $t_1, \dots, t_n$-hez tartozó integrálközelítő összegének nevezzük.

(Ezek „bizonyos területek")

Tétel $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. fv. esetén

a) $\boxed{s(f,P) \le \sigma(f,P) \le S(f,P)}$ $\forall$ P és $\sigma(f,P)$-re;

b) $\boxed{s(f,P_1) \le s(f,P_2) \wedge S(f,P_2) \le S(f,P_1)}$ $\forall$ $P_1 \subset P_2$-re;

c) $\boxed{s(f,P_1) \le S(f,P_2)}$ $\forall$ P_1, P_2-re.

3. definíció. Adott $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. fv.-re az

$\boxed{\underline{J} = \underline{\int_a^b} f = \sup_P \{s(f,P)\}}$, $\boxed{\overline{J} = \overline{\int_a^b} f = \inf_P \{S(f,P)\}}$

számokat f $[a,b]$ feletti alsó ill. felső Darboux-integráljának nevezzük. (Ezek nyilván léteznek, és $s(f,P) \le \underline{J} \le \overline{J} \le S(f,P)$ teljesül.)

4. definíció. Azt mondjuk, hogy az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha $\underline{J} = \overline{J}$. Ezt a közös értéket f $[a,b]$ feletti Riemann-integráljának nevezzük, és rá az J, $\boxed{\int_a^b f}$ vagy $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$ jelölést használjuk.

Pl. 1) $f(x) = c$, $x\in[a,b]$, így $\forall$ P felosztásra $m_i = M_i = c$

$\Rightarrow s(f,P) = S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} c\,\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = c(b-a)$,

így $\underline{J} = \overline{J} = c(b-a) \Rightarrow \boxed{\int_a^b c\,dx = c(b-a)}$

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x\in[a,b]\cap\mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus[a,b]\cap\mathbb{Q} \end{cases}$, így $\forall$ P felosztásra

$m_i = 0$, $M_i = 1$ (mert minden intervallumban van rac. és irrac. szám is), ezért

$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i = 0$, $S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i = b-a$

$\Rightarrow \underline{J} = 0$, $\overline{J} = b-a \Rightarrow \underline{J} \ne \overline{J} \Rightarrow f$ nem R-intó.

<u>Megjegyzések</u>: 1) Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl, nemnegatív és R-integrálható, így a $D=\{(x,y)\mid x\in[a,b],\ 0\le y\le f(x)\}$ síkidom területe legyen $\int_a^b f(x)dx$. (<u>görbe alatti terület</u>)

2) Ha $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. és R-integrálható, $f\le g$ $[a,b]$-n, akkor a $D=\{(x,y)\mid x\in[a,b],\ f(x)\le y\le g(x)\}$ síkidom (<u>a két görbe közötti halmaz</u>) T területe:

$$\boxed{T=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx.}$$

3) $\int_a^a f(x)dx=0$; $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$ $[a,b]$-n

kritériumok

1. <u>Tétel</u>. A $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. fv. $\Leftrightarrow$ R-int-ó, ha $\exists\, J\in\mathbb{R}$, $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta(\varepsilon)$, $\forall\, P$ felosztására $[a,b]$-nek melyre $\|P\|<\delta(\varepsilon)$ $\Rightarrow$ $|\sigma(f,P)-J|<\varepsilon$ $\forall\,\sigma(f,P)$-re
2. <u>Tétel</u>. Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl fv. $\Leftrightarrow$ R-int-ó $[a,b]$-n, ha $[a,b]$ $\forall\,\langle P_k\rangle$ normális f.o. sorozatára $\forall\,\sigma(f,P_k)$ konvergens.
3. <u>Tétel</u>. Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. fv. $\Leftrightarrow$ R-tó $[a,b]$-n, ha $\forall\,\varepsilon>0$-ra $\exists\, P$ fo.-a $[a,b]$-nek, hogy $O(f,P)<\varepsilon$. (Riemann-kritérium).

elegendő feltételek

1. <u>Tétel</u>. Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos, így R-integrálható.
2. <u>Tétel</u>. Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton, így R-integrálható
3. <u>Tétel</u>. Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl., $c\in\,]a,b[$ és f R-intó $[a,c]$ és $[c,b]$-n, így R-intó $[a,b]$-n is és

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx}$$ (Az int. additivitása az int-ra.)

Műv. tul. <u>Tétel</u>. Ha $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-int-ók, $p,q\in\mathbb{R}$, akkor $pf+q\cdot g$ is R-intó és $\boxed{\int_a^b (pf+qg)=p\int_a^b f+q\int_a^b g.}$

<u>Tétel</u> (középértéktétel). Ha $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-intók, $m\le f(x)\le M$, $0\le g(x)$ $(x\in[a,b])$ $\Rightarrow$ $\boxed{m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx}$

<u>Köv</u>. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folyt $\Rightarrow\exists\, c\in[a,b]$, hogy $\int_a^b f=f(c)(b-a)$.

A R-int. kiszámításának „eszközei” (GMI. 109.–113. o.)

1. tétel (Newton–Leibniz formula). Ha az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos fv. Riemann-integrálható és létezik $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ primitív fv.-e (azaz $F'(x)=f(x),\ x\in[a,b]$), akkor

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b}.$$

Pl. 1) $f(x)=x^2$ $(x\in[0,1])$ korl., R-intó, $\exists$ $F(x)=\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3} \Rightarrow \int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$.

2) $f(x)=\sin x$ $(x\in[0,\pi])$ korl, R-intó, $\exists$ $F(x)=\int \sin x\,dx=-\cos x \Rightarrow \int_0^\pi \sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^\pi=1$.

2. tétel (a parciális integrálás tétele R-int.-ra). Ha $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ diff-hatók, $f',g':[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonosak, akkor

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx}.$$

Pl. $\int_0^\pi \underset{f}{x}\,\underset{g'}{\sin x}\,dx = \Big[\underset{f}{x}(\underset{g}{-\cos x})\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \underset{f'}{1}(\underset{g}{-\cos x})\,dx = \pi + \Big[\sin x\Big]_0^\pi = \pi$

3. tétel (helyettesítéses R-int. tétele). Ha $g:[a,b]\to[c,d]$ -re $\exists\ g'$ és az folytonos, $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ folytonos, akkor

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx}.$$

Improprius integrálok (ld. GM.I. 113.–115. o.)

Definíció. Ha az $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ fv. $\forall\,[a,t]\subset[a,+\infty[$-en korlátos és Riemann-integrálható és $\exists$ $\boxed{\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx \doteq \int_a^{+\infty} f(x)\,dx}$ véges határérték, akkor azt az f improprius R-integráljának nevezzük $[a,+\infty[$-en.

Hasonlóan:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \doteq \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx \qquad]-\infty,b]\text{-n},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \doteq \lim_{\substack{t\to+\infty\\ s\to-\infty}}\int_s^t f(x)\,dx \qquad]-\infty,+\infty[\text{-en},$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)\,dx \qquad [a,b[\text{-n},\ \text{stb.}$$

Pl. 1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2} = \int_1^{+\infty} x^{-2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t x^{-2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{t}+1\right]=1$.

2) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^t = \lim_{t\to+\infty}\left(-e^{-t}+1\right)=1$.

c) A Riemann-integrál alkalmazásai

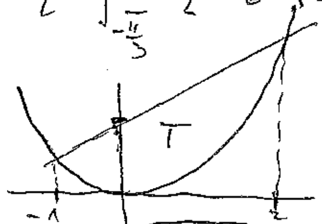
1) Területszámítás (ezt már vizsgáltuk)

Ha $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ korl. és R-integrálható, hogy $g \le f$ $[a,b]$-n, akkor a $D = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ g(x) \le y \le f(x)\}$ síkidom területe:

$$T \doteq \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx. \qquad \text{spec } (g=0):\ T \doteq \int_a^b f(x)\,dx$$

Pl. 1) $f(x) = \cos x$ és $g(x) = \frac{1}{2}$ fv.-ek közötti terület, ha $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$;

$$T = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) dx = \left[\sin x - \frac{1}{2}x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \underline{\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}}$$



2) $g(x) = x^2$, $f(x) = x + 2$ hat. véges ter.

$$x^2 = x + 2 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Big\langle {}^{-1}_{\ 2}$$

$$T = \int_{-1}^{2} \left[(x+2) - x^2\right] dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \underline{4{,}5}$$

2) Görbék ívhossza:

Legyen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható fv. (görbe)

$P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ $[a,b]$ egy felosztása.

Az $A_{i-1}(x_{i-1}, g(x_{i-1}))$ és $A_i(x_i, g(x_i))$ pontokat összekötő szakasz hossza: $d(A_{i-1}, A_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [g(x_i) - g(x_{i-1})]^2}$

Míg $$\boxed{\ell(g, P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [g(x_i) - g(x_{i-1})]^2}}$$

a g görbébe az adott P felosztás esetén beírt töröttvonal hosszának nevezzük. Ha $P_1 \subset P_2 \Rightarrow \ell(g, P_1) \le \ell(g, P_2)$.

g rektifikálható $\iff$ az $\{\ell(g,P) \mid P$ tetsz. fo-a $[a,b]\}$ korlátos

Ekkor a létező $\ell(g) \doteq \sup_P \{\ell(g,P)\}$ $(= \ell(g,[a,b]))$ számot g ívhosszának nevezzük.

Belátható, hogy $$\boxed{\ell(g) = \int_a^b \sqrt{1 + g'^2(x)}\,dx}$$

Ez adódik az

$$\ell(g,P)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left[\frac{g(x_i)-g(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\right]^2}\,(x_i-x_{i-1})=$$

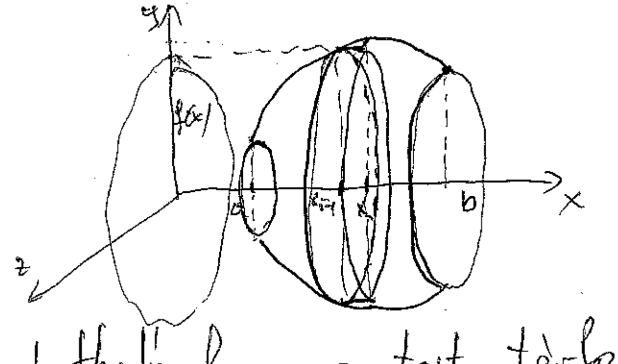
$$=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+g'^2(\xi_i)}\;\Delta x_i=\sigma\left(\sqrt{1+g'^2(x)},P\right)$$

egyenlőségből és abból jön, hogy a jobboldal a $x\to\sqrt{1+g'^2(x)}$ fv. P felosztáshoz tartozó integrálközelítő összege, továbbá az $x\to\sqrt{1+g'^2(x)}$ $(x\in[a,b])$ fv. folytonos, ezért R-integrálható: $\sigma\to\int_a^b\sqrt{1+g'^2(x)}\,dx$

Pl. $g(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ $(x\in[-r,r])$ félkör ívhossza.

3) Forgástestek térfogata:

Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos fv., hogy $f\geq 0$.
Az f fv. (és persze az $[a,b]$) által meghatározott forgástesten az $A=\{(x,y,z)\,|\,a\leq x\leq b,\ y^2+z^2\leq f^2(x)\}$ halmazt értjük.
Ezt a testet úgy kapjuk, hogy a $D=\{(x,y)\,|\,x\in[a,b],\ 0\leq y\leq f(x)\}$ síkidomot az x-tengely körül megforgatjuk: az eközben érintett pontok együtt adják a testet.



Megmutatható, hogy a test térfogata: $\boxed{V(A)=\int_a^b f^2(x)\pi\,dx=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx}$

Legyen $P=\{a=x_0,x_1,\dots,x_n=b\}$ $[a,b]$ egy felosztása, m_i, M_i a korábban definiált számok.
Az a henger, melynek tengelye az x-tengely, alap-, ill. fedőlapja az $x=x_{i-1}$, ill. $x=x_i$ síkon van és alapkörének sugara m_i — része A-nak. Együttes térfogatuk: $s=\sum_{i=1}^{n}m_i^2\pi(x_i-x_{i-1})$
M_i-t választva m_i helyett

$S = \sum_{i=1}^{n} M_i^2 \pi (x_i - x_{i-1})$ azon hengerek együttes térfogata, melyek tartalmazzák A-t.

Látható, hogy s és S az $\int_a^b f^2(x)\pi\, dx$ integrál adott P felosztáshoz tartozó alsó ill. felső közelítő összege.

Így a keresett térfogatot $\boxed{V(A) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$ adhatja

Pl. 1) Egy r sugarú gömb tekinthető az $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ $(x \in [-r, r])$ fv-hez tartozó forgástestnek, így térfogata

$$\boxed{V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx} = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{4}{3} r^3 \pi},$$

amit ismerünk a középiskolából.

2) Az $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$, $x \in [1, 4]$ fv. x körüli forgatásánál keletkezett test térfogata:

$$\boxed{V = \pi \int_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \pi \int_1^4 \frac{4}{x}\,dx = \pi\left[4 \ln x\right]_1^4 = \underline{\underline{\pi \ln 4}}}$$

<u>Megjegyzés:</u> Tekinthetünk $g: [c, d] \to \mathbb{R}$, $y \mapsto g(y)$ fv-t, melyet az y tengely körül forgatunk, ekkor

$$\boxed{V = \pi \int_c^d g^2(y)\,dy}$$ a forgástest térfogata.

Pl. Forgassuk meg az $f(x) = \ln x$ $(x > 0)$ fv-t az y-tengely körül. $0 \le y \le 6$ választással mi lesz a keletkezett forgástest térfogata?

$y = \ln x \iff x = e^y = g(y)$, $y \in [0, 6] \Rightarrow$

$$\boxed{V = \pi \int_0^6 e^y\,dy = \pi \left[e^y\right]_0^6 = e^6 - e^0 = \underline{e^6 - 1}}$$

h) Forgástestek felszíne:

Legyen most is $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f\geq 0$ adott függvény, hogy $\exists\ f':[a,b]\to\mathbb{R}$ és folytonos.
A forgástest (ahogy előbb is) az A halmaz.
(x-tengely körüli forgatás!)
Megmutatjuk, hogy a forgástest palástjának felszíne az

$$\boxed{F=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}$$

képlettel számolható.

Legyen adott most is a $P=\{a=x_0,x_1,\ldots,x_n=b\}$ felosztása $[a,b]$-nek.
Adott i-re az $[x_{i-1},x_i]$ intervallum esetén tekintsük azt a csonkakúpot, melynek tengelye az x-tengely, alap-, ill. fedőlapja az $x=x_{i-1}$, ill. $x=x_i$ síkban van és alapköreinek sugara: $f(x_{i-1})$ és $f(x_i)$.
E csonkakúp palástjának felszíne (ld. középiskola)

$$2\pi\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}=$$

$$=2\pi\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\;\Delta x_i$$

Tekintve az összes csonkakúpot, az össz p. felszín:

$$F_n=2\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\;\Delta x_i$$

Ezen összegek sorozatának a határértékét nevezzük a keresett palást felszínének, miközben $\Delta s_i=\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i$ tart 0-hoz.
F_n nem integrálközelítő összege a $2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$ függvénynek, de megmutatható, hogy határértéke egyenlő e függvény $[a,b]$-feletti R-int-jával.

Pl. Számítsa ki az $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ $(x\in[-5,5])$ fv. (félkör) x-tengely körüli forgatásával keletkező 5 sugarú gömb felszínét:

$$F = 2\pi\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\sqrt{\frac{25-x^2+x^2}{25-x^2}}\,dx = 2\pi\int_{-5}^{5}5\,dx = 2\pi\left[5x\right]_{-5}^{5} = \boxed{100\pi}$$

Megjegyzés: Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fv-t az y-tengely körül forgatjuk és $\exists\ f^{-1}=g:[c,d]\to\mathbb{R}$, úgy

$$F = 2\pi\int_{c}^{d} g(y)\sqrt{1+g'^2(y)}\,dy$$ a forgástestp. felszíne.

Pl. Az $f(x)=x^2$, $x\in[0,2]$ fv-t forgassuk meg az y-tengely körül, mi lesz a keletkezett forgástest palástjának felszíne?

$y=x^2$ $(x\in[0,2]) \iff x=\sqrt{y}=g(y)$ $(y\in[0,4])$, így

$$F = 2\pi\int_0^4\sqrt{y}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2}\,dy = 2\pi\int_0^4\sqrt{y}\sqrt{\frac{4y+1}{4y}}\,dy =$$

$$= 2\pi\int_0^4\frac{1}{2}\sqrt{4y+1}\,dy = \pi\int_0^4(4y+1)^{\frac{1}{2}}dy = \pi\left[\frac{1}{4}\frac{(4y+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{\pi}{6}\left[\sqrt{17^3}-1\right]$$

vagy: $\sqrt{4y+1}=t \Rightarrow 4y+1=t^2 \Rightarrow y=\frac{1}{4}(t^2-1) \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{t}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow dy=\frac{1}{2}t\,dt$, továbbá $t\in[\sqrt{1},\sqrt{17}]=[1,\sqrt{17}]$.

Így $$2\pi\int_0^4\frac{1}{2}\sqrt{4y+1} = 2\pi\int_1^{\sqrt{17}}\frac{1}{2}t\,\frac{1}{2}t\,dt = \frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{17}}t^2\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{17}} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\sqrt{17}^3}{3}-\frac{1}{3}\right] = \frac{\pi}{6}\left[\sqrt{17^3}-1\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{F = \quad = \frac{\pi}{6}\left[\sqrt{17^3}-1\right]}$$

5) Súlypont

A sík $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \dots, (x_n,y_n)$ pontjaiban lévő pontszerű $m_1, \dots, m_n$ tömegű testek tömegközéppontjának (súlypontjának) koordinátáit

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (*)$$

szerint számoljuk.

Speciális, nem pontszerű alakzatok súlypontját hogyan határozzuk meg?

Két speciálisan adott pontrendszert vizsgálunk.

a) Síkgörbe súlypontja

Tekintsünk egy $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fv. által adott görbét. Megmutatjuk, hogy a súlypontjának koordinátái:

$$x_S = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}; \quad y_S = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx} \qquad (**)$$

A görbe-vonalnak feleltessünk meg egy lineáris tömegeloszlású testet, hogy a γ lineáris tömegsűrűsége (az egységnyi hosszúságú darabjának tömege) állandó (homogén tömegeloszlás).

Tekintsük $[a,b]$ egy $P=\{a=x_0, x_1, \dots, x_n=b\}$ felosztását, ez adja a görbe egy felosztását az $(a,f(a)), (x_1,f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ pontokkal.

Az i-edik darab tömegét $m_i \approx \gamma\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}$, melyet az $(\xi_i, f(\xi_i))$ $(\xi_i\in[x_{i-1},x_i])$ pontba helyezünk.

Ha $(*)$-ban x_i helyett ξ_i-t, y_i helyett $f(\xi_i)$-t írunk:

$$x_S \approx \frac{\sum \xi_i\gamma\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}}{\sum \gamma\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}} = \frac{\sum \xi_i\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i}{\sum\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i}$$

aminek határértéke $(**)$ első részét adja.

Hasonlóan

$$y_s \approx \frac{\sum f(\xi_i)\,\gamma\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}}{\sum \gamma\sqrt{\Delta x_i^2+(\Delta y_i)^2}} = \frac{\sum f(\xi_i)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i}{\sum \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i},$$

s a határérték (××) második tagja.

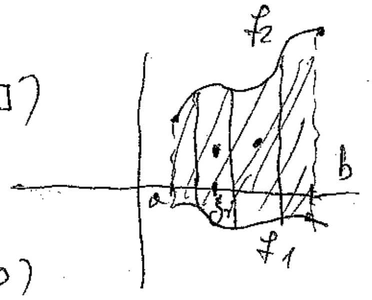
b) Síkidom súlypontja

Legyen $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_1 \le f_2$, folytonosak, akkor az

$D = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$ síkidom

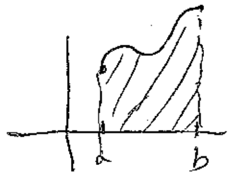
súlypontjának koordinátái:

$$X_s = \frac{\int_a^b x\,[f_2(x) - f_1(x)]\,dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx} = \frac{M_y}{T} \quad (\square)$$



$$y_s = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]\,dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx} = \frac{M_x}{T} \quad (\circ)$$

Érdekes az $f_1(x) = 0$ $(x \in [a,b])$ spec. eset is.



Most a síkidomot úgy kell tekinteni, mint egy homogén tömegeloszlású testet a δ (állandó) síkbeli tömegsűrűséggel.

Most is elkészítjük $[a,b]$ egy P felosztását, meg adja D egy „feldarabolását", illetve a részek közelítését kis téglalapokkal, melyek alapja Δx_i, magassága $f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)$ hosszúságú, ahol $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, így területük: $[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\Delta x_i$, tömegük:

$m_i = \delta\,[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\Delta x_i$, melyeket a $\left(\xi_i, \frac{f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)}{2}\right)$ pontokban helyezzük el.

$$X_s \approx \frac{\sum \xi_i\,\delta\,[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\Delta x_i}{\sum \delta\,[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\Delta x_i} \to (\square)$$

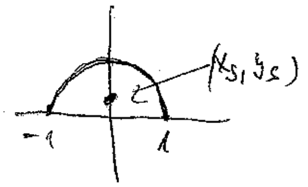
$$y_s \approx \frac{\sum \frac{f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)}{2}\,\delta\,[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\Delta x_i}{\sum \delta\,[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\,\Delta x_i} \to (\circ)$$

c) Forgástest súlypontja

Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fv. görbéjének x-tengely körüli forgatásával „keletkező" test súlypontja a szimmetria miatt az x-tengelyre esik, így $y_s = z_s = 0$, míg

$$\boxed{x_s = \frac{\int_a^b x\, f^2(x)\,dx}{\int_a^b f^2(x)\,dx}}$$

Pl. 1) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$ félkör:

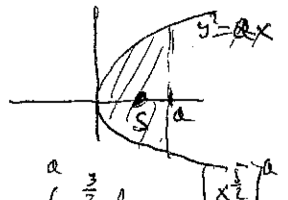


A szimmetria miatt $x_s = 0$

$$\boxed{y_s} = \frac{\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx}{\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx} = \frac{\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx}{\pi} = \frac{\int_{-1}^{1}1\,dx}{\pi} = \boxed{\frac{2}{\pi}}$$

$$\boxed{S\left(0,\frac{2}{\pi}\right)}$$

2) $D = \{(x,y) \mid x\in[0,a],\ -\sqrt{ax}\le y\le\sqrt{ax}\}$



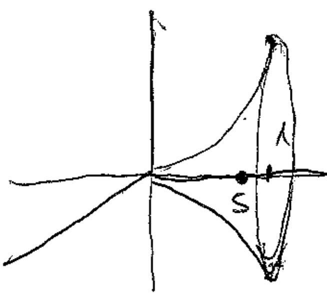
A szimmetria miatt $\boxed{y_s = 0}$

$$\boxed{x_s} = \frac{\int_0^a x\left(\sqrt{ax}-(-\sqrt{ax})\right)dx}{\int_0^a\left(\sqrt{ax}-(-\sqrt{ax})\right)dx} = \frac{2\int_0^a x\sqrt{ax}\,dx}{2\int_0^a\sqrt{ax}\,dx} = \frac{2\sqrt{a}\int_0^a x^{\frac{3}{2}}\,dx}{2\sqrt{a}\int_0^a x^{\frac{1}{2}}\,dx} = \frac{2\sqrt{a}\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^a}{2\sqrt{a}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^a} =$$

$$= \boxed{\frac{3}{5}a} \qquad \boxed{S\left(\frac{3}{5}a, 0\right)}$$

3) $f(x) = x^2$, $x\in[0,1]$ x-körüli forgatásával keletkezett forgástest súlypontjának koordinátái

$y_s = z_s = 0$ $\quad x_s = \frac{\int_0^1 x\,(x^2)^2\,dx}{\int_0^1 (x^2)^2\,dx} = \frac{\int_0^1 x^5\,dx}{\int_0^1 x^4\,dx} = \frac{\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1}{\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{6}$



$$\boxed{S\left(\frac{5}{6}, 0, 0\right)}$$

6. Többváltozós függvények

A) Az $\mathbb{R}^k$ euklideszi tér

Definíció. Legyen $\mathbb{R}^1 \doteq \mathbb{R}$ és ha $k \in \mathbb{N}$-re $\mathbb{R}^k$ értelmezett, akkor $\mathbb{R}^{k+1} \doteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$.
$\mathbb{R}^k$ elemeit $(x_1, \dots, x_k)$-val jelöljük és rendezett szám k-asoknak nevezzük, ahol

$$(x_1, \dots, x_k) = (y_1, \dots, y_k) \Leftrightarrow x_1 = y_1, \dots, x_k = y_k.$$

Egyszerűbben: $\mathbb{R}^k \doteq \overset{1}{\mathbb{R}} \times \dots \times \overset{k}{\mathbb{R}}$, azaz $\mathbb{R}^k$ az $\mathbb{R}$ önmagával vett k-szoros Descartes-féle szorzata.
Modellek: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ esetén a síkbeli Descartes-féle koordináta r.
$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ esetén a térbeli — " —

A $0 \doteq (\overset{1}{0}, \dots, \overset{k}{0})$ elemet nullelemnek nevezzük.
Ha $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$, úgy az összeadást, ill. a skalárral való szorzást

$$x + y \doteq (x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k), \text{ ill. } \lambda x \doteq (\lambda x_1, \dots, \lambda x_k) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

szerint értelmezzük.
Tétel. $\mathbb{R}^k$ a két műveletre nézve vektortér (lin. tér).

Definíció. Ha $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ akkor

$$\|x\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}, \text{ ill. } d(x,y) \doteq \|x-y\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2}$$

legyen x normája, ill. x és y távolsága (metrika)

Tétel. a) $d(x,y) \geq 0$, és $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
b) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k$;
c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^k$.

Megjegyzés: $\mathbb{R}^k$-t a d távolsággal euklideszi térnek is nevezik (k-dimenziós).

Definíció. Az $a \in \mathbb{R}^k$ pont (vektor) r sugarú nyílt gömbkörnyezete a $\boxed{K(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid d(x,a) < r\}}$ halmaz.

$\mathbb{R}^k$ topológiájának alapfogalmai (belső pont; külső pont; határpont; nyílt halmaz, zárt halmaz és tulajdonságai; torlódási pont; izolált pont; zárt halmazok jellemzése; nyílt lefedés; kompakt halmaz és jellemzése a Heine-Borel tétel) analógok $\mathbb{R}$ megfelelő fogalmaival.

Definíció. Egy $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$ függvényt $\mathbb{R}^k$-beli sorozatnak nevezzük. A jelölések azonosak a valós ($\mathbb{R}$-beli) esettel.
Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat korlátos, ha $\{x_n\}$ korlátos, azaz $\exists\, x \in \mathbb{R}^k$ és $r > 0$, hogy $d(x, x_n) < r$.
Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat konvergens, ha $\exists\, x \in \mathbb{R}^k$, $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow d(x, x_n) < \varepsilon$.
x-et a sorozat határértékének nevezzük. Jel: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.
$\langle x_n \rangle$ divergens, ha nem konvergens.

Tétel. a) Ha az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat konvergens, akkor egy. hé-e van.
b) Ha $\langle x_n \rangle$ konvergens, akkor korlátos.
c) Az $\langle x_n \rangle$ sorozat $\Leftrightarrow$ konv. és hé-e x, ha az $x_n = (x_{1n}, \ldots, x_{kn})$ jelöléssel az $\langle x_{1n} \rangle, \langle x_{2n} \rangle, \ldots, \langle x_{kn} \rangle$ koordináta sorozatok konvergensek és $x = (x_1, \ldots, x_k)$ esetén $x_{in} \to x_i$ $(i = 1, \ldots, k)$.
d) Ha $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle \in \mathbb{R}^k$ konvergensek, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_n \to x$, $y_n \to y$, akkor $\langle x_n \rangle + \langle y_n \rangle \doteq \langle x_n + y_n \rangle \to x + y$,
$\lambda \langle x_n \rangle \doteq \langle \lambda x_n \rangle \to \lambda x$

Pl $\langle x_n \rangle = \left\langle \left(\frac{n+1}{n+2}, \frac{1}{n^2} \right) \right\rangle$

$\frac{n+1}{n+2} \to 1$, $\frac{1}{n^2} \to 0 \implies x_n \to (1, 0)$

B) Többváltozós függvények folytonossága és hé-e.

Definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ típusú függvényeket k-változós valós(értékű) függvényeknek nevezzük.
Pl. $f(x,y) = x+y+2$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ egy kétváltozós valós függvény, mely szemléltethető $\mathbb{R}^3$-ban.

Definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ fv. korlátos, ha $f(E)$ korlátos; alulról ill. felülről korlátos, ha $f(E)$ alulról ill. felülről korlátos.
A $\sup f(E)$, $\inf f(E)$ számokat f pontos felső ill. pontos alsó korlátjának (supremumának ill. infimumának) nevezzük.
Ha $\exists\, x_1, x_2 \in E$, $\sup f(E) = f(x_1)$, $\inf f(E) = f(x_2)$, akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik abszolút maximuma, ill. abszolút minimuma
f-nek $x_0 \in E$-ben helyi (lokális) maximuma, ill. minimuma van ha $\exists\, K(x_0,\delta)$, hogy $x \in K(x_0,\delta) \cap E$ esetén $f(x) \le f(x_0)$, ill. $f(x) \ge f(x_0)$ teljesül

Definíció. Az $f : E \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ fv. folytonos $x_0 \in E$-ben, ha $\forall \langle x_n \rangle$ $(x_n \in E)$ sorozatra, hogy $x_n \to x_0$, $f(x_n) \to f(x_0)$ következik.
f folytonos az $E_1 \subseteq E$ halmazon, ha E_1 $\forall$ pontjában folytonos
Ha f nem folytonos $x_0 \in D_f$-ben, akkor azt mondjuk, hogy itt szakadása van, x_0-t pedig szakadási helynek nevezzük.

Tétel. Ha $f, g : E \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ folytonosak x_0-ban, akkor $f+g$ és λf is folytonosak x_0-ban.
Ha $f : E \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $g : f(E) \to \mathbb{R}$ olyanok, hogy f folyt. $x_0 \in E$-ben g folytonos $f(x_0)$-ban, akkor $F = g \circ f = g(f)$ folyt. x_0-ban.

C) Többváltozós függvények differenciálszámítása

Itt olyan $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvényekkel foglalkozunk, ahol D nyílt halmaz.

Definíció. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ adott fv., $x_0 \in D$, $e \in \mathbb{R}^k$, $e = (e_1, \dots, e_k)$, hogy $\|e\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} e_i^2} = 1$.

A $\boxed{D_e f(x_0) \doteq \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}}$ számot (ha létezik) az f fv. x_0-beli e-iránymenti differenciálhányadosának (deriváltjának) nevezzük.

Pl. $f(x,y) = x^2 + y^2$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$, $x_0 = (1,1)$, $e = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (e_1, e_2)$

Definíció. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ adott fv., $x_0 \in D$, $e_i = (\overset{1}{0}, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots \overset{k}{0})$ (az i-edik koordináta irányába mutató egységvektor). Ha létezik a

$$\boxed{D_i f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}}$$

(véges) határérték, akkor azt az f fv. i-edik változója szerinti parciális deriváltjának nevezzük.

Nyilván igaz, hogy $D_i f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = D_{e_i} f(x_0)$, azaz $D_i f$ egy speciális iránymenti derivált.

Szokásos az $f_{x_i}(x_0)$ jelölés is.

Speciálisan pl. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre legyen $(x_0, y_0) \in D$, akkor

$$D_1 f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \boxed{f_x(x_0, y_0) \doteq \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}},$$

$$D_2 f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \boxed{f_y(x_0, y_0) \doteq \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}}$$

az x ill. y változó szerinti parciális deriváltak.

Kiszámításuk: A fv-t, mint x_i $(i = 1, \dots, k)$, vagy x, vagy y fv-ének tekintjük és differenciáljuk, a többi vált.-at konstansnak tek.

Pl. 1) $f(x,y) = 5 + 2x + 3y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$f_x(x,y) = 2$; $f_y(x,y) = 3$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2) $f(x,y) = e^{x+y}(\sin x + \cos y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$f_x(x,y) = e^{x+y}(\sin x + \cos y) + e^{x+y}\cos x$

$f_y(x,y) = e^{x+y}(\sin x + \cos y) + e^{x+y}(-\sin y)$

(Az egyváltozós fv-ek differenciálásánál tanult műveleti szabályokat, alapvető deriváltakat használjuk!)

Definíció. Ha $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ adott fv. $x_0 \in D$, továbbá $\exists$ $D_i f = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ az x_0 egy $K(x_0, \delta)$ környezetének minden pontjában és $\exists$ $D_i f$-nek a j-edik változó szerinti parciális deriváltja x_0-ban akkor a

$$D_j(D_i f)(x_0) = D_j D_i f(x_0) = D_{ij} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = f_{x_i x_j}(x_0)$$

számot az f x_0-beli másodrendű, i-edik és j-edik változó szerinti parciális deriváltjának nevezzük.

Pl. $f(x,y) = x^2 + y^2$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ $\Rightarrow$

$\exists$ $f_x(x,y) = 2x$, $f_y(x,y) = 2$ $\Rightarrow$

$\exists$ $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = 0$, $f_{yx}(x,y) = 0$, $f_{yy}(x,y) = 2$

Értelmezhetők (hasonlóan) magasabbrendű parciális deriváltak is.

Tétel (Young): Ha az $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fv-nek $\exists$ a másodrendű parc. deriváltjai és folytonosak x_0-ban, úgy

$$f_{x_i x_j}(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0)$$

Tétel (a lok. szé. szükséges feltétele). Ha az $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fv-nek (x_0, y_0)-ban lokális szélsőértéke van, $\exists f_x(x_0,y_0)$ és $f_y(x_0,y_0)$ $\Rightarrow$ $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$.

Tétel (a lok. szé. egy elegendő feltétele). Ha az $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fv-nek $\exists$-nek a másodrendű parciális deriváltjai és folytonosak (x_0,y_0)-ban, $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$, akkor ha

a) $\boxed{\Delta_1 = f_{xx}(x_0,y_0) > 0}$, $\boxed{\Delta_2 = f_{xx}(x_0,y_0) f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) > 0}$, úgy f-nek (x_0,y_0)-ban lokális minimuma van;

b) $\boxed{\Delta_1 = f_{xx}(x_0,y_0) < 0}$, $\boxed{\Delta_2 > 0}$ $\Rightarrow$ (x_0,y_0)-ban lok. max. van;

c) $\Delta_2 < 0$ $\Rightarrow$ $\nexists$ lok. szé.

d) $\Delta_2 = 0$, akkor lehet is, nem is lok. szé.

Pl. 1) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$ $\quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$

$\exists f_x(x,y) = 2x + y - 3$, $\quad f_y(x,y) = x + 2y - 3$.

Ott lehet lok. szé, ahol

$$\left.\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}\right\} \iff x = 1, y = 1, \text{ azaz } (1,1)\text{-ben.}$$

$\exists f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 1$, $f_{yy}(x,y) = 2$ $\Rightarrow$
$f_{xx}(1,1) = 2$, $f_{xy}(1,1) = f_{yx}(1,1) = 1$, $f_{yy}(1,1) = 2$ $\Rightarrow$
$\Delta_1 = 2 > 0$, $\quad \Delta_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$ $\Rightarrow$
$(1,1)$-ben lok. minimum van, értéke: $f(1,1) = -3$.

2) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ $\quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$.

D) Riemann-integrál $\mathbb{R}^k$-ban

Legyen $Q \doteq [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^k$ egy tégla $\mathbb{R}^k$-ban ($k=2$-re $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ téglalap $\mathbb{R}^2$-ben, $k=3$-ra $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ téglatest) $\mathbb{R}^3$-ban)

Tekintsünk egy $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvényt.

Q mértékén (térfogatán) a $V(Q) = (b_1 - a_1) \cdots (b_k - a_k)$ számot értjük.

$P = P_1 \times \dots \times P_k$ <u>Q egy felosztása</u>, ha P_j $(j = 1, \dots, k)$ felosztása $[a_j, b_j]$-nek

Egy ilyen felosztás megadja Q résztéglákra osztását (résztintervallumok). A résztéglák átmérői hosszai halmazának supremuma definiálja <u>P finomságát</u>, melyet $\|P\|$ jelöl.

$\langle P^n \rangle$ <u>normális felosztássorozata</u> Q-nak, ha $\lim_{n\to\infty} \|P^n\| = 0$.

Jelölje $m_{i_1 \dots i_k}$ ill. $M_{i_1, \dots i_k}$ f infimumát, ill. supremumát a P felosztás résztégláin.

Most is értelmezhető $s(f,P)$, $S(f,P)$, $O(f,P)$ és $\sigma(f,P)$ (az <u>alsó</u>, <u>felső</u>, <u>oszcillációs</u> és <u>integrál-közelítő összegek</u>), és teljesül pl., hogy

a) $s(f,P) \le \sigma(f,P) \le S(f,P)$ $\forall$ P-re és $\sigma(f,P)$-re;

b) $s(f,P^1) \le S(f,P^2)$ $\forall$ P^1, P^2-re.

Értelmezhető most is az alsó ill. felső Darboux-összeg:

$$\underline{I} = \sup_P \{ s(f,P) \} \quad , \quad \overline{I} = \inf_P \{ S(f,P) \}$$

<u>$f : Q \to \mathbb{R}$ R-integrálható Q-n ha $\underline{I} = \overline{I}$.</u>

<u>Ezt az $\underline{I} = \overline{I} = \overline{I} = \int_Q f$ számot f R-intjának nevezzük Q-n.</u>

A R-integrálhatóság $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. fv-ekre megfogalmazott kritériumai itt is igazak.

Igaz továbbá, hogy egy $f: Q\to\mathbb{R}$ <u>folytonos függvény Riemann-integrálható.</u>

Ha $f,g: Q\to\mathbb{R}$ korl. fv-ek R-integrálhatók, $p,q\in\mathbb{R}$ tetsz. konstansok, akkor $pf+qg$ is R-integrálható és

$$\boxed{\int_Q (pf+qg) = p\int_Q f + q\int_Q g}$$

Belátható, hogy ha $Q=[a_1,b_1]\times\dots\times[a_k,b_k]$, $f:Q\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor

$$\boxed{\int_Q f = \int_{a_1}^{b_1}\Big(\int_{a_2}^{b_2}\cdots\Big(\int_{a_k}^{b_k} f(x_1,\dots,x_k)\,dx_k\Big)\cdots\Big)\,dx_1}$$

(<u>Fubini tétel</u>: az $\mathbb{R}^k$-beli <u>integrál Q-n</u> meghatározható valós integrálok ismételt használatával: <u>ismételt integrálással</u>.)

Ez ennél általánosabban is igaz. Nézzük $k=2$-re:

Ha $Q=[a,b]\times[c,d]$, $f:Q\to\mathbb{R}$ korlátos és R-integrálható Q-n, azaz $\exists \int_Q f = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$ és

$\forall\ x\in[a,b]$ esetén $\exists \int_c^d f(x,y)\,dy$

vagy

$\forall\ y\in[c,d]$ esetén $\exists \int_a^b f(x,y)\,dx$

akkor

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]\,dx$$

vagy

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\Big[\int_a^b f(x,y)\,dx\Big]\,dy.$$

Pl. 1) $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} xy\,dx\,dy$ $\exists$ mert $f(x,y)=xy$ folytonos $\Rightarrow$

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} xy\,dx\,dy = \int_0^1\left[\int_0^1 xy\,dy\right]dx = \int_0^1\left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1}dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

2) $\iiint\limits_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} xy^2\sqrt{z}\,dx\,dy\,dz$

3) $\iint\limits_T x e^{xy}\,dx\,dy$, ha $T=[0,1]\times[-1,0]$

A Riemann-integrál értelmezhető $S\subset\mathbb{R}^k$ korlátos halmazon is (ld. pl. GM. I. 152–155. o).
Kiemelnénk a következő eredményt:

Legyen $[a,b]\subset\mathbb{R}$ adott intervallum, $\varphi_1,\varphi_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, hogy $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ $(x\in[a,b])$, $S_1=\{(x,y)\mid x\in[a,b],\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$ (ún. egyszerű tartomány).
Ha $f:S_1\to\mathbb{R}$ folytonos fv., akkor $\exists\iint\limits_{S_1} f$ és

$$\boxed{\iint\limits_{S_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx}.$$

Hasonlóan, ha $[c,d]\in\mathbb{R}$, $\psi_1,\psi_2:[c,d]\to\mathbb{R}$, folytonosak, hogy $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$ $(y\in[c,d])$, $S_2=\{(x,y)\mid y\in[c,d],\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$ (ez egy másik típusú egyszerű tartomány).
Ha $f:S_2\to\mathbb{R}$ folytonos fv., akkor $\exists\iint\limits_{S_2} f$ és

$$\boxed{\iint\limits_{S_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy}$$

Pl. 1) $\iint\limits_S (x^2+y)\,dx\,dy = ?$, ha $S=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le\sqrt{x}\}$.

2) $\iint\limits_S \cos(x+y)\,dx\,dy = ?$, ha $S=\{(x,y)\mid 0\le y\le\pi,\ 0\le x\le y\}$.

7. Differenciálegyenletek

A) Differenciálegyenlet fogalma és megoldása

Jelöljön y egy keresett függvényt, $y(x)$ a helyettesítési értékét x-ben. Legyen $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adott folytonos fv., akkor a

(1) $\boxed{y' = f(x,y)}$ (ill. $y'(x) = f(x, y(x))$)

egyenletet elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenletnek nevezzük.

Ha $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f: D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény (D nyílt halmaz), akkor a

(2) $\boxed{y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})}$

egyenletet n-edrendű közönséges explicit differenciálegyenletnek nevezzük. (Ez $n=1$-re (1)-et adja)

Az $y: I \to \mathbb{R}$ függvény (ahol $I \subset \mathbb{R}$ intervallum) megoldása (1)-nek I-n, ha

$$(*) \begin{cases} 1)\ y\ n\text{-szer differenciálható}, \\ 2)\ (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in D \quad \forall x \in I, \\ 3)\ y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad \forall x \in I \end{cases}$$

teljesül.

Adott $F: D \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ folytonos fv. esetén tekinthető a

(3) $\boxed{F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0}$

egyenlet, melyet közönséges n-edrendű diff. egyenletnek nev.

A megoldás I-n az előbbihez hasonlóan értelmezhető.

Pl. 1) $y' = 2xy^2 - 5$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2xy^2 - 5$,

2) $y'' + 3y' - 4y - \sin x = 0$

3) $y' = -\frac{y}{x}$ $\quad f(x,y) = -\frac{y}{x}$ $\quad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0\}$

Megjegyzés: Ha f ill. F $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ ill. $y, y', \dots, y^{(n)}$ lineáris fv-e, akkor (1) ill (2) lineáris diff. egy-ek.

Cél: Az összes megoldás meghatározása

B.) Kezdeti érték probléma (Cauchy-feladat)

Ha $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos fv., $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ adott pont, úgy a

(3) $\boxed{y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0}$

problémát ~~elsőrendű~~ elsőrendű explicit közönséges diff. egy.-re vonatkozó kezdeti érték problémának vagy Cauchy-feladatnak nevezzük.

(3)-nak az $y: I \to \mathbb{R}$ fv. megoldása, ha (*) és $y(x_0) = y_0$ is teljesül.

Ugyanezek értelmezhető az n-edrendű k. exp. de.-re:

$$\boxed{y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \; (i = 0, \dots, n-1)}$$

Hasonló a helyzet a nem explicit esetben is

Pl. $y' = -\dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$ Cauchy-feladatnak mi a mo.-a?

Később belátjuk, hogy $y' = -\dfrac{y}{x}$ mo.-a $y(x) = \dfrac{c}{x}$ $(x > 0)$.

De $y(1) = \dfrac{c}{1} = 1 \iff c = 1$, így a mo. $\boxed{y = \dfrac{1}{x} \; (x > 0)}$, ami valóban áthalad az $(1,1)$ ponton.

C) Elemi úton megoldható de. típusok

a) Szeparábilis differenciálegyenletek

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $g: [c,d] \to \mathbb{R}$ $(g \neq 0)$ adott folytonos fv.-ek. Az

(sz) $\boxed{y' = f(x)\, g(y)}$

de.-et szeparábilis (szétválasztható változójú) diff. egyenletnek nev.

Belátható, hogy az $y: [a,b] \to [c,d]$ diff.-tó fv. $\iff$ mo.-a (sz)-nek, ha

(sz mo) $\boxed{\displaystyle \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\, dt \Big|_{y = y(x)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt}$

$(x, x_0 \in [a,b]; \; y, y_0 \in [c,d])$.

Megjegyzések

1) Itt $y(x_0) = y_0$ is teljesül, így megkapjuk az $y' = f(x)g(y)$, $y(x_0) = y_0$ Cauchy-feladat mo.-ását is.

2) Használhatjuk a következő (nem teljesen korrekt, de jó eredményt adó) eljárást is:

$$\boxed{y' = f(x)g(y)} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx}$$

ill. $\displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ is használható.

Példák: 1) $\boxed{y' = 2xy}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

- $y \equiv 0$ megoldás
- $y > 0$: $\int \frac{1}{y}dy = \int 2x\,dx \Rightarrow \ln y = x^2 + c \Rightarrow$

$$y = e^{x^2+c} = e^c e^{x^2} \Rightarrow y = Ce^{x^2} \quad (C>0)$$

- $y < 0$ ... $\Rightarrow y = Ce^{x^2}$ $(C<0)$

Az összes megoldás: $\boxed{y = ce^{x^2} \ (x \in \mathbb{R}), c \in \mathbb{R}}$

2) $y' = -\frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$

- $y = 0$ megoldás $\mathbb{R}_+$-on és $\mathbb{R}_-$-on
- $\int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{c_1}{x} \ (x>0),\ y = \frac{c_2}{x} \ (x<0)}$

3) $y' = f(x) \Leftrightarrow \boxed{y = \int f(x)dx + c}$ $\boxed{y' = \sin x}$

4) $y' = g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = g(y) \Rightarrow \frac{1}{g(y)}dy = 1 \cdot dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{1}{g(y)}dy + C = x}$$

$y' = e^y$ ....

b) Elsőrendű lineáris de-ek

Ha $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ adott függvények, úgy az $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ fv-re teljesülő

(LIH) $\qquad y' = f(x)y + g(x)$

de-et elsőrendű lineáris inhomogén, míg az

(LH) $\qquad y' = f(x)y$

de-et elsőrendű lineáris homogén de-nek nevezzük.

Tétel. Az $y_H : [a,b] \to \mathbb{R}$ fv. $\Leftrightarrow$ mo-a (LH)-nek, ha

(LH mo.) $\boxed{y_H(x) = Ce^{\int f(x)dx}}$

Ez nyilvánvaló, hiszen (LH) egy spec. szeparábilis egy, így $y=0$ mo., ha $y \neq 0$, úgy

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y \Rightarrow \frac{1}{y}dy = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int f(x)dx$$

ha $y>0 \Rightarrow \ln y = \int f(x)dx + c \Rightarrow y = e^c e^{\int f(x)dx} = Ce^{\int f(x)dx} \quad (C>0)$

ha $y<0 \Rightarrow \ln|y| = \int f(x)dx + c \Rightarrow y = Ce^{\int f(x)dx} \quad (C<0)$

$$\boxed{y_H = Ce^{\int f(x)dx} \qquad (C \in \mathbb{R})}$$

Tétel. Az $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ fv. $\Leftrightarrow$ mo.-a (LIH)-nek, ha

$$\boxed{y(x) = y_H(x) + y_p(x)}$$

ahol $y_H(x) = Ce^{\int f(x)dx}$ (LH) ált. megoldása, míg y_p (LIH) egy partikuláris megoldása.

y_p az alábbi eljárással adható meg (konstansvariálás módszere):

- Tekintsük a (LIH)-ből képzett (LH)-t, ekkor $y_H(x) = Ce^{\int f(x)dx}$ adja annak mo-ásait
- Keressük y_p-t az

$$\boxed{y_p(x) = C(x)\, e^{\int f(x)\,dx}}$$ alakban.

Ekkor $y_p'(x) = C'(x) e^{\int f(x)dx} + C(x) e^{\int f(x)dx} \cdot f(x)$

Ezeket (LIH)-be helyettesítve:

$$C'(x) e^{\int f(x)dx} + \cancel{C(x) f(x) e^{\int f(x)dx}} = \cancel{f(x) C(x) e^{\int f(x)dx}} + g(x)$$

illetve $C'(x) = g(x)\, e^{-\int f(x)dx}$

adódik, melyből $C(x)$ integrálással adódik:

$$C(x) = \int \left[g(x)\, e^{-\int f(x)dx} \right] dx .$$

Ezt kell $y_p(x)$ fenti alakjába beírni.

Pl. 1) $y' + 3y = e^{-x} \Rightarrow \boxed{y' = -3y + e^{-x}}$

- A hozzátartozó homogén egyenlet:

$\boxed{y_H' = -3y_H} \Leftrightarrow \frac{dy_H}{dx} = -3y_H \Rightarrow \frac{1}{y_H} dy_H = -3dx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y_H} dy_H = -3\int 1dx \Rightarrow \ln|y_H| = -3x + \ln|C|$

$\Rightarrow |y_H| = |C| e^{-3x} \Rightarrow \boxed{y_H(x) = C e^{-3x}}$

- Keressük y_p-t $\boxed{y_p(x) = C(x) e^{-3x}}$ alakban

$y_p'(x) = C'(x) e^{-3x} + C(x) e^{-3x}(-3)$

Ezt az inhomogén egyenletbe behelyettesítve:

$C'(x) e^{-3x} + \cancel{C(x) e^{-3x}(-3)} = \cancel{-3C(x) e^{-3x}} + e^{-x} \Rightarrow$

$C'(x) e^{-3x} = e^{-x} \Rightarrow \boxed{C'(x) = e^{2x}} \Rightarrow C(x) = \int e^{2x} dx$

$\Rightarrow C(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \Rightarrow$

- $y_p(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot e^{-3x} = \frac{1}{2} e^{-x} \Rightarrow$

- $\boxed{y = C e^{-3x} + \frac{1}{2} e^{-x}}$, ami megoldás.

c) Homogén fokszámú de.-ek

Az $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$ de-et homogén fokszámú egy-nek nev.

Az $\frac{y(x)}{x} = u(x) \iff y(x) = x\,u(x) \Rightarrow y'(x) = u(x) + x\,u'(x)$

helyettesítéssel az egyenlet

$$x\,u'(x) + u(x) = f(u(x))$$

azaz

$$x\,u' + u = f(u) \iff \boxed{u' = \frac{1}{x}\left(f(u) - u\right)}$$

alakba írható, ami egy szétválasztható változójú egyenlet, melynek ismerjük a megoldási módszerét. Ha u-t meghatároztuk, akkor $y(x) = x\,u(x)$ adja az eredeti egyenlet megoldásait is.

Pl. $\boxed{y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}}$ $(x \neq 0,\ x^2 - y^2 \neq 0)$ x^2-tel osztva a jobb oldalt

$$\Rightarrow y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \xRightarrow{u = \frac{y}{x} \iff y = ux \Rightarrow y' = u + xu'} u + xu' = \frac{u}{1-u^2} \Rightarrow$$

$$u' = \frac{1}{x}\left(\frac{u}{1-u^2} - u\right) \Rightarrow u' = \frac{1}{x}\,\frac{u^3}{1-u^2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\,\frac{u^3}{1-u^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1-u^2}{u^3}\,du = \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \int\left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right)du = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + C \Rightarrow -\frac{1}{2u^2} = \ln|ux| + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \ln\left|x\,\frac{y}{x}\right| + C \Rightarrow \boxed{\ln|y| = -\frac{x^2}{2y^2} - C}$$

d) Az $y' = f(ax + by + c)$ alakú diff. egy-ek

$u = ax + by + c$ helyettesítés $(a \neq 0,\ b \neq 0)$

Pl. $\boxed{y' = (x + y - 4)^2}$

$u = x + y - 4 \Rightarrow y = u - x + 4 \Rightarrow y' = u' - 1 \Rightarrow u' - 1 = u^2$

$\Rightarrow \boxed{u' = u^2 + 1} \Rightarrow \frac{du}{dx} = u^2 + 1 \Rightarrow \int \frac{1}{u^2+1}\,du = \int 1\,dx \Rightarrow$

$\operatorname{arctg} u = x + C \Rightarrow u = \operatorname{tg}(x + C) \Rightarrow x + y - 4 = \operatorname{tg}(x + C) \Rightarrow$ mo.

D) Másodrendű de-ek

$y'' = f(x, y, y')$ ill. $F(x, y, y', y'') = 0$ alakúak

a) Speciális esetek (hiányos egyenletek)

- $\boxed{y'' = f(x)} \Rightarrow y' = \int f(x)\,dx + c_1 \Rightarrow y = \int \left[\int f(x)\,dx + c_1\right] + c_2$

Pl. $\boxed{(1+\sin x)^2 y'' + \cos x = 0} \Rightarrow y'' = -\frac{\cos x}{(\sin x + 1)^2} \Rightarrow$

$$y' = -\int (\sin x + 1)^{-2} \cos x\,dx = \frac{1}{\sin x + 1} + c_1 \Rightarrow$$

$$y = \int \left(\frac{1}{\sin x + 1} + c_1\right) \cancel{dx \Rightarrow} = \int \frac{1}{\sin x + 1}\,dx + c_1 x + c_2 =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + 1} \frac{2}{1+t^2}\,dt \Big|_{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}} + c_1 x + c_2 =$$

$$= \int \frac{2}{(t+1)^2}\,dt \Big|_{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}} + c_1 x + c_2 = \boxed{-\frac{2}{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}} + c_1 x + c_2}$$

- $\boxed{F(x, y', y'') = 0}$ $y' = u \Rightarrow \boxed{F(x, u, u') = 0}$ elsőrendű

Pl. $\boxed{y'' = y' + x^2 - 2x}$ $y' = u \Rightarrow \boxed{u' = u + x^2 - 2x}$

Mo: Hom egy: $u_H' = u_H \Rightarrow \frac{du_H}{dx} = u_H \Rightarrow \frac{1}{u_H} du_H = 1\,dx$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{u_H} du_H = \int 1\,dx \Rightarrow \boxed{u_H(x) = c_1 e^x}$$

Inh: $\boxed{u_p = c_1(x) e^x}$ $u_p' = c_1'(x) e^x + c_1(x) e^x$

$$c_1'(x) e^x + \cancel{c_1(x) e^x} = \cancel{c_1(x) e^x} + x^2 - 2x$$

$$c_1'(x) = (x^2 - 2x) e^{-x} \Rightarrow c_1(x) = \int (x^2 - 2x) e^{-x}\,dx + c$$

$$c_1(x) = -x^2 e^{-x}$$

$$\Rightarrow u_p = -x^2 e^{-x} e^x = -x^2$$

$$\Rightarrow u(x) = c_1 e^x - x^2 \Rightarrow y = \int u\,dx \Rightarrow$$

$$\boxed{y = \int (c_1 e^x - x^2)\,dx = c_1 e^x - \frac{x^3}{3} + c_2}$$

- $\boxed{F(y, y', y'') = 0}$ $y' = p(y)$, $y'' = p'(y) \cdot y' = p'(y)\,p$

b) Konstansegyütthatós másodrendű lin. homogén de-ek

(Δ) $\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0}$

A megoldást $y = e^{\lambda x}$ alakban keressük, ekkor $y' = \lambda e^{\lambda x} \Rightarrow y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \Rightarrow$

$\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_2 e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow$

(0) $\boxed{\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0}$ (Δ) karakterisztikus egyenlete.

- Ha (0) megoldásai a $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valós számok, ügy á.mo.

$$\boxed{y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$$

- Ha (0) megoldása $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$ valós számok, úgy á.mo.

$$\boxed{y = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x}}$$

- Ha (0) megoldásai a $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ill. $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ komplex számok, akkor á.mo.:

$$\boxed{y = e^{\alpha x}[C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x]}$$

Pl. 1) $y'' - y' - 6y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2 \Rightarrow$

$$\boxed{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}}$$

2) $y'' - 8y' + 16y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 4 \Rightarrow$

$$\boxed{y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}}$$

3) $4y'' + 4y' + 37y = 0 \Leftrightarrow y'' + y' + \frac{37}{4} y = 0 \Rightarrow$

$\lambda^2 + \lambda + \frac{37}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm 3i$

$$\Rightarrow \boxed{y = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 \cancel{\cos} \sin 3x + C_2 \cos 3x)}$$