Lajkó Károly

MÉRTÉK- ÉS INTEGRÁLELMÉLET

matematika levelező mesterképzés
matematika nappali mesterképzés
matematika BSC képzés

NYÍREGYHÁZA

2009.

I. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS ℝ-ben

(Anal II. 33.–67., 80.–84.)

1. Primitív függvény, határozatlan integrál

(Anal II. 33.–36.)

Definíció. Legyen adott az $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ függvény. Az $F:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ fv-t f primitív függvényének (határozatlan integráljának) nevezzük, ha differenciálható és $F'=f$.

Jelölés: $\int f$, $\int f(x)\,dx$

1. **Tétel.** Ha $f,F:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$, hogy $F'=f$ $(F=\int f)$, úgy $G:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ primitív fv-e (határozatlan int-ja) f-nek, ha $\exists C\in\mathbb{R}$, hogy $\boxed{G(x)=F(x)+C}$

Alapintegrálok: Az alap-deriváltak ismeretében egyszerűen összeállítható egy „táblázat".

2. **Tétel.** Ha adott $f,g:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$-re $\exists\int f,\int g$ és $p,q\in\mathbb{R}$ adott, akkor $\exists\int(pf+qg)$ és $C\in\mathbb{R}$, hogy $\forall x\in\langle a,b\rangle$-re

$$\boxed{\int[p\,f(x)+q\,g(x)]\,dx=p\int f(x)\,dx+q\int g(x)\,dx+C}$$

3. **Tétel.** (parciális int-ás tétele) Ha $f,g:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ differenciálhatók és $\exists\int f'g \Rightarrow \exists\int fg'$ és $C\in\mathbb{R}$, hogy $\forall x\in\langle a,b\rangle$-re

$$(P)\quad \boxed{\int f(x)\,g'(x)\,dx=f(x)\,g(x)-\int f'(x)\,g(x)\,dx+C}$$

Megjegyzés. Bizonyos szorzatok integrálása így végezhető.

4. **Tétel** (helyettesítéses int. t.) Ha $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$, $g:\langle c,d\rangle\to\langle a,b\rangle$ olyanok, hogy $\exists g'$ és $\int f \Rightarrow \exists\int(f\circ g)\,g'$ és $C\in\mathbb{R}$, hogy

$$(H)\quad \boxed{\int f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int f(t)\,dt\Big|_{t=g(x)}+C}=\boxed{F(g(x))+C}$$

Ha $\exists g^{-1}\Rightarrow (H')$ $\boxed{\int f(x)\,dx=\int f(g(t))\,g'(t)\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)}+C}$

2) A Riemann-integrálhatóság fogalma

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos fv.-ekkel foglalkozunk.

1. Def: $P=\{x_i \mid a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}\subset[a,b]$ [a,b] egy felosztása. $x_1,\dots,x_n$ az osztáspontok, $[x_{i-1},x_i]$ a f.o. részintervallumai, $\|P\| \doteq \sup_i\{\Delta x_i = x_i-x_{i-1} \mid i=1,\dots,n\}$ a felosztás finomsága. P_2 finomítása (továbbosztása) P_1-nek, ha $P_1 \subset P_2$. $\langle P_k\rangle$ normális feloszt. sorozata [a,b]-nek, ha $\lim_{k\to\infty}\|P_k\|=0$.

2. Def. Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ adott korl. fv., P egy felosztása [a,b]-nek, úgy

$M_i = \sup_i f([x_{i-1},x_i])$, $m_i = \inf_i f([x_{i-1},x_i])$ mellett a

$\boxed{s(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i}$ $\boxed{S(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i x_i}$, $\boxed{\mathcal{O}(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i}$

számokat az f P-hez tartozó alsó, felső, oszcillációs összegének, míg $t_i \in [x_{i-1},x_i]$ esetén a $\boxed{\sigma(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i}$ számot az f P-hez és $t_1,\dots,t_n$-hez tart.-ó integrálközelítő összegének nevezzük.

(Geometriailag ezek bizonyos „területek".)

1. Tétel. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. fv., akkor

a) $s(f,P)\le\sigma(f,P)\le S(f,P)$ $(\forall P)$; b) $s(f,P_1)\le s(f,P_2)$ és $S(f,P_2)\le S(f,P_1)$, ha $P_1\subset P_2$;

c) $s(f,P_1)\le S(f,P_2)$ $\forall P_1,P_2$-re.

3. Def. Az $\boxed{\underline{I} = \underline{\int_a^b} f = \sup_P\{s(f,P)\}}$, $\boxed{\overline{I} = \overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f,P)\}}$

számokat az f [a,b]-feletti alsó, ill. felső Darboux-int-nak nev.

Megjegyzés. $\underline{J}, \overline{J} \in \mathbb{R}$ és $\underline{J}\le\overline{J}$, $s(f,P)\le\underline{J}\le\overline{J}\le S(f,P)$, $0\le\mathcal{O}(f,P)$.

Pl. a) $f(x)=c$ $(x\in[a,b])$ esetén $\underline{J}=\overline{J}$. b) $\exists f$, $\underline{J}\ne\overline{J}$ (Dirichlet fv.)

4. Def. f Riemann-integrálható [a,b]-n, ha $\underline{J}=\overline{J}=J$.

J-t f [a,b] feletti R-int-jának nev. Jel: $\int_a^b f$, $\int_a^b f(x)dx$.

Geometriai tartalom: görbe alatti terület

2. Tétel (Darboux): Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl., akkor $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0$, [a,b] $\forall$ P felosztására, hogy $\|P\|<\delta(\varepsilon) \Rightarrow$

$\boxed{S(f,P)-\overline{J}<\varepsilon}$, $\boxed{J-s(f,P)<\varepsilon}$

Következmény ∀(P_k) norm. fo.-sorozatra

a) ∃ $\lim_{k\to\infty} s(f,P_k) = \underline{J}$, $\lim_{k\to\infty} S(f,P_k) = \bar{J}$ és $\lim_{k\to\infty} O(f,P_k) = \bar{J} - \underline{J}$

b) ∃ $\sigma^1(f,P_k)$ és $\sigma^2(f,P_k)$, hogy ∃ $\lim_{k\to\infty} \sigma^1(f,P_k) = \underline{J}$, $\lim_{k\to\infty} \sigma^2(f,P_k) = \bar{J}$.

3) A R-int-tóság kritériumai és elegendő feltételei

1.–4. Tétel – $\sigma(f,P)$-vel ; $\underset{\Downarrow}{\underline{-\sigma(f,P_k)\text{-val}}}$; – $O(f,P)$-vel ; – $O(f,P_k)$-val

⊡ Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. fv. ⟺ R-int-tó $[a,b]$-n, ha $[a,b]$ ∀P_k normális felosztássorozatához tartozó ∀ $\sigma(f,P_k)$ int. közelítő összegsorozat konvergens (Ez lehetne egy másik definíció)

⊡ 5. Tétel. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos fv. R-int-tó. (~~szükséges~~ Elegendő felt.)

6. Tétel. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton fv. R-int-tó (Elegendő felt.).

7. Tétel. f R-tó $[a,b]$-n és $[c,d]\subset[a,b] \Rightarrow$ R-tó $[c,d]$-n is (–"–).

8. Tétel (additivitás az intervallumra): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ adott k. fv., $c\in[a,b]$ és f R-tó $[a,c]$ és $[c,b]$-n $\Rightarrow$ $[a,b]$-n is és

$$\boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^d f}$$

(Ez is egy elegendő felt.)

9. Ha az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. fv. véges sok pont kivételével folyt $\Rightarrow$ R-int-tó $[a,b]$-n.

10. Tétel (Lebesgue-kritérium) ... átvezet a Lebesgue-mértékhez.

4) Műveleti tulajdonságok, egyenlőtlenségek, középértéktételek

1. Tétel. Ha $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-tók, $p,q\in\mathbb{R}$ adott, akkor $pf+qg$ is az és

$$\boxed{\int_a^b (pf+qg) = p\int_a^b f + q\int_a^b g}$$

Megj.: Ez igaz véges ~~számra~~ is, ill f^2, fg, $|f|$, $\frac{f}{g}$ $(|g(x)|\geq c>0)$.

2. Tétel. a) f,g R-int-ók $[a,b]$-n és $f\leq g$ $\Rightarrow$ $\boxed{\int_a^b f \leq \int_a^b g}$

b) $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

⊡ c) $m\leq f\leq M$ és $0\leq g$ $\Rightarrow$ $\boxed{m\int_a^b g \leq \int_a^b f\cdot g \leq M\int_a^b g}$ ké-tétel

$\boxed{m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)}$

d) f folyt $\Rightarrow$ ∃ $c\in[a,b]$ $\boxed{\int_a^b f = (b-a)f(c)}$

5) Newton-Leibniz-formula, az int. kiszámítása

1. Def. Ha f R-i.tó $[a,b]$-n, úgy $\int_a^a f \doteq 0$, $\int_b^a f \doteq -\int_a^b f$.
Az $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\boxed{F(x) \doteq \int_a^x f(t)\,dt}$ fv-t f integráljának, mint a felső határ függvényének (területmérő v. integrálfüggvényének) nevezzük.

1. Tétel. a) Ha f R-i.tó $[a,b]$-n, úgy F (int. fv) folytonos.
b) Ha f R-i.tó $[a,b]$-n és folyt. $x \in [a,b]$-ben $\Rightarrow$
F diff.ható x-ben és $F'(x) = f(x)$.
c) Ha f folytonos $[a,b]$ (úgy R-i.tó), akkor $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$, azaz F (int. fv.) primitív fv-e f-nek. ($\exists$ p. fv.)

⊡ 2. Tétel. (Newton-Leibniz-formula). Ha $f, F:[a,b]\to\mathbb{R}$ olyan, hogy
a) f R-integrálható
b) F folytonos $[a,b]$-n és diff.ható $]a,b[$-n, ill. $F'(x) = f(x)$ $]a,b[$-n.
akkor
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)} \left(\doteq \left[F(x)\right]_a^b\right).$$

Az R-int. kiszámításában segítenek:
3. Tétel (parc. int. R-int.-ra) $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonosan diff.ható, úgy
$$\boxed{\int_a^b f g' = f(b)g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f' g}$$

4. Tétel (helyettesítéses R.int.) $g:[a,b]\to[c,d]$ folytonosan diff.ható, $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ folytonos, akkor
$$\boxed{\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx}$$

6) Fv. sorozatok és fv. sorok tagonkénti int-sága és diff-sága

1. Tétel. $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-i.tók $\langle f_n \rangle$ (ill $\sum f_n$) egy.-en konv $[a,b]$-n ~~[illegible]~~ az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fv-hez $\Rightarrow \exists \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$ (ill $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$).
2. Tétel (diff-tóság — 57.o.).

7) Impropius R-integrálok

Def. $a \in \mathbb{R}$ adott, $a < b \le +\infty$, $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ $\forall [a,t] \subset [a,b[$-n kor. és R-fó és $b = +\infty$ vagy $\exists\, \varepsilon > 0$, hogy f nem korl $[b-\varepsilon, b[$. Ha $\boxed{\exists \lim_{t \to b-0} \int_a^t f \doteq \int_a^b f}$ véges hé, akkor ezt az f impropius R-int-jának nev. $[a,b)$-n. Azt mondjuk hogy az impropius int konvergens. (Ha a hé nem $\exists$, úgy az imp. int. divergens)

- A $-\infty \le c < a$, $f :]c,a] \to \mathbb{R}$-re is értelmezhetjük..., hogy
$$\boxed{\exists \lim_{t \to c+0} \int_t^a f \doteq \int_a^b f}$$
- $-\infty \le a < b \le +\infty$, $f :]a,b[\to \mathbb{R}$-re pedig az értelmezés.
$$\boxed{\exists \lim_{\substack{x \to a+0 \\ y \to b-0}} \int_x^y f \doteq \int_a^b f}$$

Pl. a) $\int_1^\infty x^\alpha \, dx = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha+1}, & \text{ha } \alpha < -1 \\ \text{div.}, & \text{egyébként} \end{cases}$ b) $\int_0^\infty e^{\alpha x} \, dx = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha}, & \alpha < 0 \\ +\infty, & \alpha \ge 0 \end{cases}$

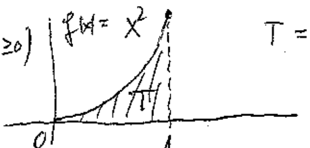
8) Alkalmazások

a) Terület definíciója: a görbe alatti ill. görbék közötti ter.

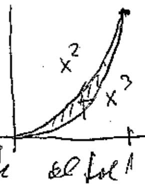
$T = \int_a^b f(x)\,dx$ $(f \ge 0)$

$T = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx$

$f_2 \ge f_1$



$T = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

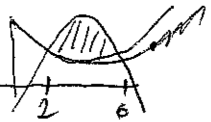


$T = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$

$y = -x^2 + 8x - 9$, $y = \frac{x^2}{2} - 4x + 9$ görbék által bezárt terület:

$\{y = 1$; $x + y = \frac{5}{2}\}$ köt. ter

$x_1 = 4, x_2 = 2$



$T = \int_2^6 [(-x^2 + 8x - 9) - (\frac{x^2}{2} - 4x + 9)]\,dx = 16$

b) Görbe ívhossza: (Anal II. 80 − 84.)

Görbe: $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ folyt. fv.

$\ell(\underline{f}, P) = \sum_{i=1}^{n} \| \underline{f}(t_i) - \underline{f}(t_{i-1}) \|$

$\underline{f}$ sima g. $\Rightarrow$ $\boxed{\ell(\underline{f}) = \sup_P \{\ell(\underline{f}, P)\} = \int_a^b \|\underline{f}'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i'^2(t)}\,dt}$

Pl. $\underline{f} = (\cos, \sin) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ egységkör: $\ell(\underline{f}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = 2\pi$

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ folyt-an diff-tó ívhossza $\boxed{\int_a^b \sqrt{1 + g'^2(t)}\,dt}$

$g(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in [0,1]$.

$g' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow g'^2(x) = \frac{9}{4} x$

$x^2 + y^2 = 25$ $\boxed{1/4 \text{ kör ívhossza}}$

$\ell(g) = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \left[\frac{(1 + \frac{9}{4}x)^{3/2}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4}}\right]_0^1 = \frac{8}{27}\left[1 - \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right]$

c) Forgástest térfogata: $\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$

$f(x) = \sqrt{5^2 - x^2}$ $(x \in [-5,5])$; $f(x) = \sin x$ $(x \in [0,\pi])$; $f(x) = \frac{2}{\dots}$ $(x \in [1,1])$

II. RIEMANN-INTEGRÁL $\mathbb{R}^n$-ben

(Anal III. 51. – 82.)

Itt most a jobban követhető $\mathbb{R}^2$-beli felépítést adjuk meg.

1) R-integrál téglalapon ($\mathbb{R}^2$-beli intervallumon).

(A fogalom és a tul.-ok szoros analógiát mutatnak a valóssal.)

$f: \underbrace{Q=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ korlátos fv.-ekkel foglalkozunk

(ez egy téglalap $\mathbb{R}^2$-ben)

1. Def. A $Q=[a_1,b_1]\times[a_2,b]$ tégla mértékén (területén) a

$$\boxed{m(Q) \doteq (b_1-a_1)(b_2-a_2)}$$ számot értjük

2. Def. Ha Q adott téglalap és

$P_1=\{x_{1i} \mid a_1=x_{10}<x_{11}<\dots<x_{1n}=b_1\}$, $P_2=\{x_{2i} \mid a_2=x_{20}<x_{21}<\dots<x_{2m}=b_2\}$

az $[a_1,b_1]$ ill. $[a_2,b_2]$ intervallumok egy felosztása, úgy a $P=P_1\times P_2$ halmazt a Q egy felosztásának ~~nevezzük~~,

a $T_{ij} \doteq [x_{1i-1}, x_{1i}]\times[x_{2j-1}, x_{2j}]$ $(i=1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,m)$ téglalapokat a P felosztás résztéglalapjainak (részintervallumok),

a $\|P\| = \sup\limits_{i,j}\{\operatorname{diam} T_{ij}\}$ számot (a résztéglalapok átlói hosszának szupremumát) a P finomságának nevezzük.

P^2 finomítása (továbbosztása) P^1-nek, ha $P^1\subset P^2$.

$\langle P^k\rangle$ normális felosztássorozata Q-nak, ha $\lim\limits_{k\to\infty}\|P^k\|=0$

2. Def. Ha $f: Q\to\mathbb{R}$ korlátos fv., P egy felosztása Q-nak a T_{ij} résztéglalapokkal, akkor

$M_{ij}=\sup\limits_{i,j} f(T_{ij})$; $m_{ij}=\inf\limits_{i,j} f(T_{ij})$ mellett a

$s(f,P)=\sum\limits_{i,j} m_{ij}\, m(T_{ij})$; $S(f,P)=\sum\limits_{i,j} M_{ij}\, m(T_{ij})$; $\mathcal{O}(f,P)=S(f,P)-s(f,P)$

számokat az f P-hez tartozó alsó, felső és oszcillációs összegeinek,

míg $\forall t_{ij}\in T_{ij}$ esetén a $\sigma(f,P)=\sum\limits_{i,j} f(t_{ij})\,m(T_{ij})$ számot az f, P-hez és a t_{ij}-khez tartozó integrálközelítő összegének nev.

(Ezek bizonyos „térfogatok".)

Most is igaz ez

1. Tétel. Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ korl fv., úgy

a) $s(f,P) \le \sigma(f,P) \le S(f,P)$ $(\forall P)$; b) $s(f,P^1) \le s(f,P^2)$, $S(f,P^2) \le S(f,P^1)$, ha $P^1 \subset P^2$.

c) $s(f,P^1) \le S(f,P^2)$ $\forall P^1, P^2$.

3. Def. Az $\underline{J} = \underline{\int_Q} f = \sup_P \{s(f,P)\}$ és $\overline{J} = \overline{\int_Q} f = \inf_P \{S(f,P)\}$ számokat f Q feletti alsó, ill. felső Darboux-int-jának nev.

Megjegyzés: $\underline{J}, \overline{J} \in \mathbb{R}$, $\underline{J} \le \overline{J}$, $0 \le \overline{J} - \underline{J} \le O(f,P)$

Pl. 1) $f(x) = k$ $(x \in Q) \Rightarrow \underline{J} = \overline{J}$; $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \text{ és k. rac.} \\ 0, & \text{egyébk.} \end{cases} \Rightarrow \underline{J} \ne \overline{J}$.

4. Def. f R-integrálható Q-n, ha $\underline{J} = \overline{J} = J$. J-t az f Q feletti R-integráljának nevezzük. Jel: $\int_Q f$ $\int_Q f(x,y)\,dx\,dy$ $\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dx\,dy$.

Geometriai tartalom: felület alatti térfogat, 3dim mérték)

2. Tétel (Darboux). Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ korl. fv., akkor $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, Q $\forall$ P felosztására, hogy $\|P\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow$

$$S(f,P) - \overline{J} < \varepsilon \quad ; \quad \underline{J} - s(f,P) < \varepsilon .$$

Következmény: mint korábban, csak Q $\forall \langle P^k \rangle$ norm. f.o. sorozata

2) A R-int-ság kritériumai és elegendő feltételei téglalapon

1.–4. Tétel. • $\sigma(f,P)$-vel; • $\sigma(f,P^k)$-val; • $\vartheta(f,P)$-vel; • $\vartheta(f,P^k)$-val.

Riemann-kritérium: $f : Q \to \mathbb{R}$ korl. fv. $\Leftrightarrow$ R-int-ó Q-n, ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ P felosztása Q-nak, hogy $\vartheta(f,P) = S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

5. Tétel. $f : Q \to \mathbb{R}$ folytonos fv. R-integrálható

6. Tétel. $f : Q_1 \to \mathbb{R}$ R-int-tó, $Q_2 \subset Q_1$ is tégla, úgy $f|_{Q_2}$ R-int Q_2-n.

7. Tétel (az int. additivitása téglalapra). Q_1, Q_2 közös belső pont nélküli téglalapok, hogy $Q = Q_1 \cup Q_2$ is téglalap.
Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ R-int-ó Q_1 és Q_2 $\Rightarrow$ Q-n is és $\int_Q f = \int_{Q_1} f + \int_{Q_2} f$.

(Ez mehet többre is!)

3) Műveleti tulajdonságok, egyenlőtlenségek, középértéktételek

1. **Tétel.** Ha $f, g: Q \to \mathbb{R}$ R-integrálhatók, $p, q \in \mathbb{R}$ adott, akkor $pf + qg$ is R-ható és $\boxed{\int_Q (pf+qg) = p\int_Q f + q\int_Q g}$.

Megj. Ez igaz véges összegre általában is, ill. f^2, $f\cdot g$, $|f|$ és $\frac{f}{g}$-re $(g \geq c > 0)$ is.

2. **Tétel.** Ha $f, g: Q \to \mathbb{R}$ R-integrálhatók Q-n, úgy

a) $f \leq g \Rightarrow \int_Q f \leq \int_Q g$

b) $\left|\int_Q f\right| \leq \int_Q |f|$

c) $m \leq f \leq M,\ 0 \leq g \Rightarrow m\int_Q g \leq \int_Q f\cdot g \leq M\int_Q g$

d) Ha $f: Q \to \mathbb{R}$ R-ható $m \leq f \leq M \Rightarrow m \leq \frac{1}{m(Q)}\int_Q f$

e) Ha f folytonos $\Rightarrow \exists\ c \in Q$, hogy $\int_Q f = m(Q)\, f(c)$.

4) Az integrál kiszámítása (Fubini-tétel) téglalapon

1. **Tétel.** Ha
- $f: Q \to \mathbb{R}$ korl. fv. R-integrálható Q-n és
- $\forall\ x \in [a_1, b_1]$-re $\exists \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy$

vagy
- $\forall\ y \in [a_2, b_2]$-re $\exists \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx$, akkor

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\right)dx \text{ vagy } \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

2. **Tétel.** Ha $f: Q \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor

$$\boxed{\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\right)dx}$$

Pl. 1) $\iint_{[0,1]\times[0,1]} x\sqrt{y}\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^1 x\sqrt{y}\,dx\right)dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\sqrt{y}\right]_{x=0}^{x=1} dy =$

$= \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{y}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \underline{\frac{1}{3}}$

2) $\iint_{[0,1]\times[-1,0]} x\,e^{xy}\,dx\,dy$

5) A Riemann-integrál korlátos $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^n$)-beli halmazon

Def. Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$ (v $\mathbb{R}^n$) korlátos halmaz, $f: S \to \mathbb{R}$ korlátos fv., $f_S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$f_S(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in S \\ 0 & , x \in CS \end{cases}$$

$$\boxed{f_S(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in S \\ 0 & ,(x,y) \in CS \end{cases}}$$

Legyen $Q \subset \mathbb{R}^2$ (v $\mathbb{R}^n$) olyan téglalap (tégla), hogy $S \subset Q$.

Az f fv.-t R-integrálhatónak mondjuk S felett, ha $\exists \int_Q f_S$ és az

$$\boxed{\int_S f \doteq \int_Q f_S}$$

számot az f S feletti Riemann-integráljának nev.

Megj. $\int_S f$ nem függ Q megválasztásától.

Tétel (az int. tulajdonságai). Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$ (v $\mathbb{R}^n$) korl. halmaz, $f, g: S \to \mathbb{R}$ korlátos fv.-ek.

a) Ha f és g R-int.-ók S-en, akkor $pf + qg$ $(p, q \in \mathbb{R})$ is és

$$\boxed{\int_S (pf + qg) = p\int_S f + q\int_S g}$$

(véges összegre is!)

b) Ha f, g R-int.-ók S-en és $f \leq g \Rightarrow \int_S f \leq \int_S g$

c) Ha f R-int.-ó $\Rightarrow |f|$ is és $|\int_S f| \leq \int_S |f|$.

d) $T \subset S$, $f \geq 0$ S-en és R-int.-ó T-n és S-en is $\Rightarrow \int_T f \leq \int_S f$

e) Ha f R-int.-ó S_1 és S_2 felett, akkor $S_1 \cup S_2$ és $S_1 \cap S_2$ felett is és

$$\boxed{\int_{S_1 \cup S_2} f = \int_{S_1} f + \int_{S_2} f - \int_{S_1 \cap S_2} f}$$

ha $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ v. 0 msl $\mathbb{R}^2$/
így $\int_{S_1 \cap S_2} f = 0$

5) Jordan-mérhető halmazok $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^n$)-ben

1. Def. Legyen $S\subset\mathbb{R}^2$ ($\vee\ \mathbb{R}^n$) korlátos halmaz. Ha az $f(x,y)=1$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ ($\vee$ $f(x)=1$, $x\in\mathbb{R}^n$) konstans fv. R-integrálható S-en, akkor azt mondjuk, hogy S Jordan-mérhető $\mathbb{R}^2$-ben ($\vee\ \mathbb{R}^n$-ben) és az

$$\boxed{m_J(S) \doteq \int_S 1 \doteq \int_Q 1_S} \qquad (*) \qquad (S\subset Q)$$

számot S Jordan-mértékének nevezzük.

Megj. 1) Ha $S=Q\subset\mathbb{R}^n$ tégla, akkor $m_J(Q)=\int_Q 1 = m(Q)$

i⊡ 2) Mit jelent szemléletesebben a J-mérhetőség és mérték?

◎ (*) miatt $m_J(S)=\int_Q 1_S$, ha S Jordan-mérhető, ami azzal ekvivalens, hogy

$$\boxed{\underline{\int}_Q 1_S = \overline{\int}_Q 1_S} \qquad \left(1_S(x)\doteq\begin{cases}1, & x\in S\\ 0, & x\in CS\end{cases}\right)$$

és $m_J(S)$ ez a közös érték (az alsó és felső D-int. =)

◎ Tudjuk, hogy

$$\underline{\int}_Q 1_S \doteq \sup_P\{s(1_S,P)\} \quad \text{és} \quad \overline{\int}_Q 1_S \doteq \inf_P\{S(1_S,P)$$

◎ Másrészt, mivel 1_S vagy 1 vagy 0, így

$$s(1_S,P)=\sum\nolimits_* m(T_{ij}) = j(S,P) \quad \text{, ha } T_{ij}\subset S$$

$$S(1_S,P)=\sum\nolimits^* m(T_{ij}) = J(S,P) \quad \text{, ha } T_{ij}\cap(S\cup \mathrm{Bd}S)\neq\emptyset$$

Itt $j(S,P)$ a belülről $J(S,P)$ a kívülről közelítő (egymáshoz csatlakozó, közös belső pont nélküli) téglalapok területeinek összege. $0\le j(S,P)\le J(S,P)\le m(Q)$

◎ Így $\underline{\int}_Q 1_S = \dots = \sup\{j(S,P)\} = m_{*J}(S)$ | $\overline{\int}_Q 1_S = \dots = \inf\{J(S,P)\} = m^*_J(S)$
ahol $m_{*J}(S)$-t belső, $m^*_J(S)$-t külső Jordan mértéknek nev.

◎ $S\subset\mathbb{R}^2$ ($\vee\ \mathbb{R}^n$) $\Leftrightarrow$ J-mérhető, ha $m_{*J}(S)=m^*_J(S)=m_J(S)$.

Tétel. a) Ha S Jordan-mérhető, akkor $m_J(S)\geq 0$.

b) S_1, S_2 J-mérhető, $S_1\subset S_2 \Rightarrow m_J(S_1)\leq m_J(S_2)$.

c) Ha S_1 és S_2 J mérhetők akkor $S_1\cup S_2$ és $S_1\cap S_2$ is az, és

$$m_J(S_1\cup S_2)=m_J(S_1)+m_J(S_2)-m_J(S_1\cap S_2).$$

Köv. Ha S_1 és S_2 J-mérhető, közös belső pont nélküli h-ok, akkor $m_J(S_1\cap S_2)=0 \Rightarrow \boxed{m_J(S_1\cup S_2)=m_J(S_1)+m_J(S_2)}$

Ebből jön a J-mérték ~~[illegible]~~ véges additivitása:

$$\boxed{m_J\left(\bigcup_{i=1}^{k} S_i\right)=\sum_{i=1}^{k} m_J(S_i)},$$

ha S_i-k páronként közös belső pont nélküli h-ok.

Megjegyzések: A J-mérték eltolás (transzláció) invariáns, így m_J nemnegatív, végesen additív, mozg. inv. mérték, hogy az egységkocka (~~téglalap~~ négyzet) térfogata (területe) 1.

A következő eredmény azt mutatja, hogy az egyváltozós fv. R-intjának geometriai (mértékelméleti) ~~tartalma~~ valóban a görbe alatti terület.

Tétel. Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ nemnegatív, R-integrálható, akkor az $S=\{(x,y)\mid x\in[a,b],\ y\in[0,f(x)]\}\subset\mathbb{R}^2$ halmaz J-mérhető és $m_J(S)=\int_a^b f(x)\,dx$.

Tétel (Fubini-tétel egyszerű tartományra). Legyen $[a,b]\subset\mathbb{R}$ zárt intervallum, $\phi,\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos fv-ek, $S=\{(x,y)\mid x\in[a,b],\ \phi(x)\leq y\leq\psi(x)\}$ (egyszerű tartomány), $f:S\to\mathbb{R}$ folytonos fv, akkor f R-integrálható S-en és

$$\boxed{\iint_S f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right]dx}$$

Pl. 1) S: az $y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=3a$ egyenesekkel határolt.

$$\iint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy=?$$

2) Az $xy=1$ és $x+y=\frac{5}{2}$ ~~gö~~ görbékkel határolt síkidom területe.

III. Lebesgue-mérték

(~~IV.~~ Mértékek konstruálása)

A differenciál és integrálszámítás tárgyban megadtuk a Jordan-mérték definícióját (konstrukcióját). Ez és a Jordan-mérték fontosabb tulajdonságai megtalálhatók az Analízis III. jegyzetben (65.–73. o.). Kiemelnénk, hogy a Jordan-mérték egy nemnegatív, monoton, végesen additív, mozgásinvariáns mérték, melynél az egységkocka mértéke egy.

A következőkben előbb a számegyenes megadjuk a Lebesgue-mérték definícióját (konstrukcióját), majd egy absztrakt mértékteret, illetve mértéket.

1. A számegyenes topológiája

A valós számok $\mathbb{R}$ halmaza (a számegyenes, mint modell) metrikus tér a $\varrho(x,y)=|x-y|$ $(x,y\in\mathbb{R})$ metrikával. Az alapvető topológiai fogalmakat (belső pont, nyílt halmaz, zárt halmaz, torlódási pont, konvergencia, kompakt halmaz) és a hozzájuk kapcsolódó tételeket ismertnek tekintjük, használjuk. A korábban bevezetett jelöléseken túl a továbbiakban $\mathcal{N}$ a korlátos nyílt, Z a korlátos zárt, K a korlátos halmazok osztályát jelöli $\mathbb{R}$-ben.

Szükségünk lesz a következő (eddig nem vizsgált) fogalomra és eredményekre.

<u>Definíció</u>. Legyen $G \in \mathcal{N}$ nemüres halmaz. A $\delta = (a,b)$ $(a<b)$ nyílt intervallumot G komponensének nevezzük, ha $\delta \subset G$ és $a,b \notin G$.

① <u>Tétel</u>. $\forall$ $G \in \mathcal{N}$ nemüres halmaz előállítható legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok páronként diszjunkt komponensének egyesítéseként. (<u>struktúra-tétel</u>)

Biz. Daróczy: Mérték és Integrál (D) (4.–5. o.).

2. <u>Tétel</u>. Ha $F_1, F_2 \in \mathcal{Z}$ nemüres és diszjunkt halmazok, akkor $\exists$ $G_1, G_2 \in \mathcal{N}$, hogy $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$ és $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. (<u>Elválasztási tétel</u>)

Biz. (D) (5.–6. o.).

2. A Lebesgue-mérték a számegyenesen

a) <u>Korlátos nyílt halmazok mértéke</u>

<u>Definíció</u>. A $\delta = (a,b)$ nyílt intervallum mértékén az $m\delta \doteq b-a$ számot értjük. Ha $D \in \mathcal{N}$, úgy a struktúra tétel miatt

$$D = \bigcup_i \delta_i \quad (\delta_i = (a_i,b_i)),\ \delta_j \cap \delta_k = \emptyset \text{, ha } j \neq k),$$

egy ilyen D halmaz mértékén az

$$mD = \sum_i m\delta_i$$

számot értjük (ha létezik). $m\emptyset \doteq 0$.

Megjegyzések: 1) $\forall\, D \in \mathcal{N}$-re $\exists\, mD$.

2) $\forall\, D \in \mathcal{N}$-re $mD \geq 0$.

3) $m : \mathcal{N} \to [0,\infty)$ halmazfüggvény.

(ld. (D), 7.–8.o.)

Tétel. Az $m : \mathcal{N} \to [0,\infty)$ mértékre teljesül, hogy:

- Monoton: $D_1 \subseteq D_2$ $(D_1, D_2 \in \mathcal{N}) \Rightarrow mD_1 \leq mD_2$;

⊖ Teljesen additív: Ha $D = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$ $(D, D_i \in \mathcal{N})$ és $D_j \cap D_k = \emptyset$, ha $j \neq k$ $\Rightarrow$ $mD = \sum\limits_{i=1}^{\infty} mD_i$,

- Szubadditív: Ha $D = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$ $(D, D_i \in \mathcal{N}) \Rightarrow$ $mD \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} mD_i$.

Biz. (D) 9.–12.o.

Megjegyzések. 1) A teljesen additív és szubadditív tulajdonságok a $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$ véges előállításokra is igazak.

② Egy $D \in \mathcal{N}$ mértékére

$$mD = \inf\{mG \mid D \subseteq G,\ G \in \mathcal{N}\}.$$

(ld. (D) 12.o)

b) Korlátos zárt halmazok mértéke

Legyen $F \in Z$ tetszőleges nemüres halmaz, $A = \inf F \in F$, $B = \sup F \in F$, $S = [A, B]$ (az F-et tartalmazó legszűkebb zárt intervallum). Ekkor $C_S F = S \setminus F$ korlátos nyílt halmaz, mert $C_S F = (A, B) \cap CF$.

Definíció. Az $F \in Z$ halmaz mértékén az

$$mF = B - A - m[C_S F]$$

számot értjük.

Tétel. A korlátos zárt halmazok osztályán értelmezett mértékre teljesül, hogy

- $mF \geq 0$, $mF < +\infty$, így $m: Z \to [0, \infty)$

⊖ Monoton: $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow mF_1 \leq mF_2$ $(F_1, F_2 \in Z)$

- Végesen additív: $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ $(F_i \in Z,\ F_j \cap F_k = \emptyset,\ j \neq k)$
  $\Rightarrow \quad mF = \sum_{i=1}^{n} mF_i$.

Biz. (D) 13.–17.o.

Megjegyzések: 1) $mD = \sup\{mF \mid F \subseteq D, F \in Z\}$, $D \in \mathcal{N}$;

2) $mF = \inf\{mD \mid F \subseteq D, D \in \mathcal{N}\}$, $F \in Z$;

3) $mF = \sup\{mH \mid H \subseteq F, H \in Z\}$, $F \in Z$.

(ld. (D) 14.–17.o)

c) Korlátos halmazok külső és belső mértéke

Definíció. Az $E \in \mathcal{K}$ halmaz külső mértékén az

$$m^*E = \inf\{mD \mid E \subseteq D,\ D \in \mathcal{N}\},$$

belső mértékén pedig az

$$m_*E = \sup\{mF \mid F \subseteq E,\ F \in Z\}$$

számot értjük. Az üres halmazra $m^*\emptyset = m_*\emptyset = 0$.

Tétel. A korlátos halmazok $\mathcal{K}$ osztályán értelmezett külső és belső mértéke teljesül, hogy:

– $0 \leq m^*E \leq +\infty$; $0 \leq m_*E < +\infty$, azaz $m^*, m_* : \mathcal{K} \to [0,\infty)$;

$\ominus$ Monoton: $E_1 \subseteq E_2$ $(E_1, E_2) \in \mathcal{K} \Rightarrow$

$$m^*E_1 \leq m^*E_2 \quad , \quad m_*E_1 \leq m_*E_2 \; ;$$

$\ominus$ m^* szubadditív: $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ $(E, E_i \in \mathcal{K}) \Rightarrow$

$$m^*E \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*E_i \; ;$$

(véges előállításra is igaz);

$\ominus$ m_* erősen additív: $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ $(E, E_i \in \mathcal{K}; E_i \cap E_k = \emptyset, i \neq k)$

$$\Rightarrow \qquad m_*E \geq \sum_{i=1}^{\infty} m_*E_i$$

(véges előállításra is igaz);

$\ominus$ $m_*E \leq m^*E \quad \forall\, E \in \mathcal{K}$;

$\cancel{\ominus}$ Ha $E \subset \Delta \doteq (A, B)$ (nyílt intervallumban) $\Rightarrow$

$$m^*E + m_*[C_\Delta E] = m\Delta \, .$$

Biz. (D) 18.–21.o.

d) (Lebesgue-) mérhető halmazok

Definíció. Az $E \in \mathcal{K}$ halmazt (Lebesgue-) mérhetőnek nevezzük, ha $m^*E = m_*E$. Az E mérhető halmaz (Lebesgue-) mértékén az

$$mE \doteq m^*E = m_*E$$

számot értjük.

Jelölje $\mathfrak{M}$ a számegyenes (Lebesgue-) mérhető halmazait. Nyilván: $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{K}$.

Tétel (a Lebesgue-mérték tulajdonságai).

$\begin{cases} mD = \inf\{mG \ldots\} \\ mD = \sup\{mF \ldots\} \end{cases}$

$\begin{cases} m^* D = mD \\ m_* D = mD \end{cases}$

⊖ A korlátos nyílt és zárt halmazok mérhetőek és mértékük egyenlő a korábban definiált mértékkel.

— $\forall$ mérhető halmaz mértéke nemnegatív.

⊖ Teljesen additív: ha $\boxed{E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i}$ $(E_i \in \mathcal{M})$ és $E_j \cap E_k = 0$ $j \neq k$-ra $\Rightarrow$ E mérhető, ha $E \in \mathcal{K}$ és

$$\boxed{mE = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i}$$

$\boxed{\sum mE_i} = \sum m_* E_i \leq$
$\leq \boxed{m_* E \leq m^* E} \leq$
$\leq \sum m^* E_i = \boxed{\sum mE_i}$

— Ha $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ $\Rightarrow$ $\boxed{E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{M}}$.

— Ha $E_i \in \mathcal{M}$ $(i \in N)$ és $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{K}$, akkor $\boxed{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \cancel{\mathcal{K}}}$.

— Ha $E_i \in \mathcal{M}$ $(i \in N)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \cancel{\mathcal{K}}}$ $\qquad \mathcal{K} = \mathcal{M}$

— $\exists$ a számegyenesen korlátos nem mérhető halmaz.

Biz. (D) 22.–26.o.

3. Absztrakt mértékterek

Ha $\bar{X} \subset \mathbb{R}$ mérhető halmaz és $\mathcal{S}$ jelöli a $\bar{X}$ összes mérhető részhalmazának osztályát, akkor az utolsó tétel szerint $\mathcal{S}$-re teljesül, hogy

— $\bar{X} \in \mathcal{S}$;

— Ha $E \in \mathcal{S}$ $\Rightarrow$ $(\bar{X} - E) \in \mathcal{S}$;

— Ha $E_i \in \mathcal{S}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ $\Rightarrow$ $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{S}$.

Továbbá minden $E \in \mathcal{S}$ halmazra értelmezve van egy mE szám (az E Lebesgue-mértéke), hogy:

— $0 \leq mE \leq m\bar{X} < \infty$ $\forall$ $E \in \mathcal{S}$.

— Ha $E_i \in \mathcal{S}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ és $E_j \cap E_k = \phi$ $j \neq k$, akkor $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i$. (teljesen add.)

— Ha $E \in \mathcal{S}$ és $mE = 0$ $\Rightarrow$ $\forall$ $E' \subset E$-re $E' \in \mathcal{S} \wedge mE' = 0$.

(a mérték teljes)

eredmények igazak lesznek az $(\bar{X}, \mathcal{S}, m)$-re is.

Tétel. Ha $(\bar{X}, \beta, m)$ tetszőleges mértéktér, akkor teljesülnek a következők:

⊖ Ha $E_i \in \beta$ $(i=1,2,\ldots)$, akkor $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \beta$;

⊖ Ha $E_1 \subset E_2$ $(E_1, E_2 \in \beta) \Rightarrow (E_2 \setminus E_1) \in \beta$ és
$m(E_2 \setminus E_1) = mE_2 - mE_1$;

⊖ Ha $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$ mérhető halmazok és $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, akkor
$$mE = \lim_{n\to\infty} mE_n \; ;$$

⊖ Ha $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ mérhető halmazok és $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$, akkor
$$mE = \lim_{n\to\infty} mE_n .$$

(~~Az~~ utóbbi két tulajdonság a mérték folytonosságát jelenti.)

Biz. (D) 28. – 30. o.

IV. Mérhető függvények és függvénysorozatok

1. Mérhető függvények

Célunk lehet, hogy a I-ben tárgyalt mértékelmélet eszközeivel kezeljünk függvényeket. Ehhez szükséges, hogy a függvény képterének sok halmazára azon pontok halmaza, melyek képe ebben az adott halmazban van kezelhető legyen a mértékelmélet segítségével.

Nyilván választhatunk, hogy a képtér e sok halmazát hogyan válasszuk és az is, hogy e halmazok mérhetőségét „érdemes” megkövetelni, illetve az is, hogy az adott tulajdonsággal rendelkező” függvényosztályt valahogy elnevezzük.

1. Definíció. Legyen $(\bar{X}, \mathcal{B}, m)$ tetszőleges mértéktér, $f : \bar{X} \to \mathbb{R}_b$ $(\mathbb{R}_b = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$ adott függvény. Az f függvényt mérhetőnek nevezzük, ha $\forall\, a \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\bar{X}\,(f > a) \doteq \{\, x \mid x \in \bar{X},\ f(x) > a \,\}$$

(úgynevezett) nívóhalmaz mérhető, azaz $X\,(f > a) \in \mathcal{B}$.

Az f függvényt végesnek nevezzük, ha nem vesz fel $-\infty$ és $+\infty$ értéket.

2. Definíció. Ha egy adott (T) tulajdonság egy $E \subset \bar{X}$ halmaz kivételével teljesül, melyre $m\,E = 0$, akkor azt mondjuk, hogy a (T) tulajdonság majdnem mindenütt teljesül ($\bar{X}$-en). Például, ha f és g két valós függvény $\bar{X}$-en, hogy $m\,\bar{X}\,(f \neq g) = 0$, akkor f majdnem mindenütt egyenlő g-vel (és fordítva).

1. Tétel. Legyen f mérhető függvény $\bar{X}$-en. Ha g olyan függvény $\bar{X}$-en, mely majdnem mindenütt egyenlő f-el, akkor g is mérhető $\bar{X}$-en.

② Tétel. Ha f mérhető $\bar{X}$-en, akkor $\forall\, a \in \mathbb{R}$-re az $\bar{X}\,(f \geq a)$, $\bar{X}\,(f = a)$, $\bar{X}\,(f \leq a)$, $\bar{X}\,(f < a)$ nívóh.-ok is mérhetők.

③ Tétel (műveleti tulajdonságok).

⊖ Ha f mérhető $\bar{X}$-en és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor az $f + c$, cf, $|f|$, f^2, $\frac{1}{f}$ $(f \neq 0)$ f.v.-ek is mérhetőek.

⊖ Ha f és g véges mérhető függvények $\bar{X}$-en, úgy $f - g$, $f + g$, $f \cdot g$ és $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ is mérhetőek.

Biz. (D) 31. – 34.

2. Mérhető függvények sorozatai

A pontonkénti és egyenletes konvergencia fogalma ismert.

1. <u>Tétel</u>. Legyen $\langle f_n \rangle$ mérhető fv.-ek sorozata $\bar{X}$-en, hogy $\exists$ a $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in \bar{X})$ véges vagy végtelen határérték, akkor F mérhető függvény $\bar{X}$-en.

Biz. (D) 34.-35.o.

1. <u>Definíció</u>. Legyen $\langle f_n \rangle$ m. fv-ek sorozata $\bar{X}$-en. Ha $\exists$ F, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x) \text{ majdnem mindenütt},$$

akkor azt mondjuk, hogy $\langle f_n \rangle$ <u>m.m. konvergál</u> F-hez.

2. <u>Tétel</u>. Ha a mérhető függvények $\langle f_n \rangle$ sorozata m.m. konvergál F-hez, akkor F mérhető.

<u>Biz</u>. (D) 35.-36.o.

2. <u>Definíció</u>. Legyen $\langle f_n \rangle$ m.m. véges mérhető függvényekből álló sorozat és f m.m. véges mérhető függvény $\bar{X}$-en. Ha $\forall\, \sigma > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} m\,\bar{X}\,(|f_n - f| \geq \sigma) = 0,$$

akkor azt mondjuk, hogy f_n <u>mértékben konvergál</u> f-hez, jelölésben: $f_n \Rightarrow f$.

A m.m. konvergencia és a mértékben való konvergencia kapcsolatát írja le a következő két tétel.

3. <u>Tétel</u> (<u>Lebesgue</u>). Ha az $\langle f_n \rangle$ m.m. véges függvényekből álló sorozat m.m. egy m.m. véges f függvényhez konvergál, akkor $f_n \Rightarrow f$ is igaz.

④ <u>Tétel</u> (<u>Riesz-féle kiválasztási tétel</u>). Ha $f_n \Rightarrow f$, akkor $\exists$ $\langle f_{n_k} \rangle$ részsorozat, hogy $f_{n_k} \to f$ m.m.

<u>Biz</u>. (D) 36.-38. o.

5. **Tétel** (Jegorov). Legyen $\langle f_n \rangle$ m.m. véges mérhető függvényekből álló sorozat, melyre $f_n \to f$ m.m., ahol f mérhető és m.m. véges fv. Akkor $\forall\ \delta > 0$ esetén $\exists\ E \subset \bar{X}$ mérhető halmaz, hogy $m\bar{X} - mE < \delta$ és a konvergencia E-n egyenletes.

Biz. (D) 39.–40.o.

3. Zárt intervallumon mérhető függvények szerkezete

Legyen $\bar{X} = [a,b]$, $\mathcal{B}$ az $[a,b]$ int. Lebesgue-mérhető részhalmazainak Borel-féle halmaztestje, m pedig a Lebesgue-mérték $\mathcal{B}$-n. $(\bar{X}, \mathcal{B}, m)$ nyilván mértéktér.

A folytonos és mérhető függvények kapcsolatát vizsgáljuk.

① **Tétel**. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor mérhető $[a,b]$-n.

Biz. (D) 66.o.

A tétel megfordítása nyilván(?) nem igaz.

2. **Tétel** (Borel). Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mérhető és korlátos fv., azaz $|f| \leq K$, akkor $\forall\ \sigma > 0$ és $\varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos fv., melyre

$$m\bar{X}(|f - \psi| \geq \sigma) < \varepsilon \quad , \quad |\psi| \leq K$$

teljesül.

Biz. (D) 68.–69.o.

③ **Tétel** (Fréchet). Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos ($|f| \leq K$) és mérhető függvény, akkor $\exists\ \langle \varphi_n \rangle$ ($\varphi_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos), hogy $|\varphi_k| \leq K$ $(k = 1, 2, \dots)$ és $\varphi_n \to f$ m.m.

Biz. (D) 69.o.

4. **Tétel** (Luzin). Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korl. és mérhető fv. ($|f| \leq K$), akkor $\forall\ \delta > 0$-hoz $\exists\ \varphi\ [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos fv., hogy $m\bar{X}(f \neq \varphi) < \delta$, $|\varphi| \leq K$.

VI. Lebesgue-integrál

1. Korlátos mérhető függvények Lebesgue-integrálja

Legyen $(\bar{X}, \mathcal{B}, m)$ tetszőleges mértéktér, $f : \bar{X} \to \mathbb{R}$ korlátos mérhető függvény, $A, B \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $A < f(x) < B$ $(x \in \bar{X})$, $P = \{ y_i \mid A = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = B \}$ $[A, B]$ egy felosztása és

$$e_k = \bar{X}\,(y_k \le f < y_{k+1}) \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

mérhető halmazok (f mérhetősége miatt), melyek páronként diszjunktak és $\bigcup_{k=0}^{n-1} e_k = E$ teljesül, így $m\bar{X} = \sum_{k=0}^{n-1} m e_k$ (az m mérték definíciója miatt).

1. **Definíció**. Az $f : \bar{X} \to \mathbb{R}$ korlátos mérhető függvény P felosztáshoz tartozó alsó Lebesgue-összegén a

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \, m e_k \quad ,$$

felső Lebesgue-összegén a

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \, m e_k$$

számokat értjük.

1. **Tétel** (a Lebesgue-összegek tulajdonságai).

ⓐ Ha $\lambda = \max_k (y_{k+1} - y_k)$, úgy $0 \le S - s \le \lambda \, m \bar{X}$.

ⓑ $\exists \ \sup_P \{s\} = \alpha$, $\inf_P \{S\} = \beta$ és $\alpha = \beta$, továbbá $\alpha = \beta$ független A és B választásától.

Biz: (D) 42.–44. o.

2. **Definíció**. Az $f : \bar{X} \to \mathbb{R}$ mérhető korlátos függvény Lebesgue-integrálján az $\alpha = \beta$ számot értjük, jelölésben:

$$\alpha = \beta = \int_{\bar{X}} f(x) \, dm(x)$$

3. **Definíció**. Legyen $f: \bar{X} \to \mathbb{R}$ korlátos mérhető függvény, $E \subset \bar{X}$ mérhető halmaz, $\mathcal{B}_E = \{E \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$, $(E, \mathcal{B}_E, m)$ mértéktér, akkor az E felett is korlátos mérhető f függvényre $\exists$ $\int_E f(x)\,dm(x)$ $(E \subset \bar{X})$, melyet az f E-feletti Lebesgue-integráljának nevezzük.

Megjegyzés. Ha $\bar{X} = [a,b] \subset \mathbb{R}$ és m a Lebesgue-mérték, akkor az $\int_a^b f(x)\,dm(x)$ vagy $\int_a^b f\,dm$ jelölést használjuk.

2. **Tétel** (korl. m. fv. L-int-jának tulajdonságai).

a) Ha $a \le f(x) \le b$ $(x \in \bar{X})$, akkor $a\,m\bar{X} \le \int_{\bar{X}} f(x)\,dm(x) \le b\,m\bar{X}$ (középérték-tétel).

b) Ha $f(x) = c \Rightarrow \int_{\bar{X}} f\,dm = c\,m\bar{X}$, ha $f \ge 0 \Rightarrow \int_X f\,dm \ge 0$, ha $E \subset \mathcal{B}$ és $m E = 0 \Rightarrow \int_E f\,dm = 0$.

$\bar{X} = E_1 \cup E_2 \Rightarrow \int = \int_1 + \int_2$
ind. véges esetre
$\bar{X} = \bigcup^{\infty} E_i \Rightarrow m\bar{X} = \sum m E_i$
$\sum_{i=n+1}^{\infty} m E_i \to 0$
$R_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i \Rightarrow \int_X = \sum^{n} \int_{E_i} + \int_{R_n}$
$A\,m R_n \le \int_{R_n} f \le B\,m R_n$

Ⓒ Ha E_i $(i \in \mathbb{N})$ páronként diszjunkt mérhető halmazok, hogy $\bar{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, akkor

$$\int_{\bar{X}} f(x)\,dm(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f(x)\,dm(x).$$

(teljes additivitás tétele).

d) Ha $f = g$ m.m., akkor $\int_{\bar{X}} f\,dm = \int_{\bar{X}} g\,dm$.

e) Ha $f \ge 0$ és $\int_{\bar{X}} f\,dm = 0 \Rightarrow f = 0$ m.m.

f) Legyen $f, g: \bar{X} \to \mathbb{R}$ korl. m. fv., akkor

$$\int_{\bar{X}} [f(x) + g(x)]\,dm(x) = \int_{\bar{X}} f(x)\,dm(x) + \int_{\bar{X}} g(x)\,dm(x)$$

(additivitás).

Ⓖ Ha $f: \bar{X} \to \mathbb{R}$ k. m. fv. és $c \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{\bar{X}} c f(x)\,dm(x) = c \int_X f(x)\,dm(x)$.

Ⓗ Ha $f, g: \bar{X} \to \mathbb{R}$ k. m. fv. és $f(x) \le g(x)$ $(x \in \bar{X})$, akkor

$$\int_{\bar{X}} f(x)\,dm(x) \le \int_{\bar{X}} g(x)\,dm(x).$$

ⓘ Ha $f: \bar{X} \to \mathbb{R}$ k. m. fv. $\Rightarrow \left| \int_{\bar{X}} f(x)\,dm(x) \right| \le \int_{\bar{X}} |f(x)|\,dm(x)$.

j) Legyen $\langle f_n \rangle$ m. f. fv-ek sorozata $\bar{X}$-en, hogy $\exists\ K \in \mathbb{R}$ $|f_n(x)| < K$ $(n \in N)$ és mértékben konvergál az f korlátos mérhető függvényhez, akkor

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\bar{X}} f_n(x)\, dm(x) = \int_{\bar{X}} f(x)\, dm(x)$$

(kis Lebesgue-tétel).

Biz: (D) 45. – 52. o.

2. Nemnegatív mérhető függvények Lebesgue-integrálja

Legyen a továbbiakban is $(\bar{X}, \mathcal{B}, m)$ telj. mértéktér, $f: \bar{X} \to \mathbb{R}$ pedig nemnegatív mérhető fv. $\bar{X}$-en.

1. Definíció. Ha N természetes szám, akkor az $f \geq 0$ m. fv. N-edik szeletfüggvényén az

$$[f(x)]_N \doteq \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) \leq N \\ N, & \text{ha } f(x) > N \end{cases}$$

fv.-t értjük.

$[f]_N$ korlátos és mérhető, így $\exists$ Lebesgue-int-ja.

$0 \leq [f]_1 \leq [f]_2 \leq \dots \Rightarrow 0 \leq \int_{\bar{X}} [f]_1 dm \leq \int_{\bar{X}} [f]_2 dm \leq \dots$, így $\exists \lim_{N \to \infty} \int_{\bar{X}} [f]_N dm$ véges v. végtelen határérték.

2. Definíció: Az f nemnegatív mérhető függvényt Lebesgue-integrálhatónak nevezzük, ha a $\lim_{N \to \infty} \int_{\bar{X}} [f]_N dm$ határérték véges és ezt az értéket f Lebesgue-integráljának nevezzük, jelölésben:

$$\int_{\bar{X}} f(x)\, dm(x) \doteq \lim_{N \to \infty} \int_{\bar{X}} [f(x)]_N\, dm(x) < +\infty.$$

Ha $E \subset \bar{X}$ m. halmaz és f m. nemnegatív fv. E-n, úgy hasonlóan definiálható f L-integrálhatósága és

$\int_E f(x)\,dm(x)$ -el jelölt Lebesgue-integrálja.
Ha a határérték végtelen, akkor $\int_X f\,dm = +\infty$, de akkor f nem integrálható.

<u>Megjegyzés</u>. Egy nemnegatív korlátos mérhető függvény L-integrálható és L-integrálja a korábban definiált L-integrál.

<u>Tétel</u> (<u>az int. tul.-i</u>). $f \geq 0$ m. fv. X-en, úgy:

ⓐ Ha f L-integrálható, úgy f m.m. véges

ⓑ Ha $g(x) = f(x)$ m.m. $(g \geq 0)$, akkor $\int_X g\,dm = \int_X f\,dm$.

ⓒ Ha g m. és $g \geq f$, akkor $\int_X f\,dm \leq \int_X g\,dm$.

d) Ha $\int_X f\,dm = 0$, akkor $f = 0$ m.m.

$[f]_N + [g]_N \le f+g$

$[f+g]_N \le [f]_N + [g]_N$

ⓔ Ha $f, g \geq 0$ m. $\Rightarrow$ $\int_X [f+g]\,dm = \int_X f\,dm + \int_X g\,dm$ (additivitás).

f) Ha $f \geq 0$ m., $c \geq 0$ konstans, úgy $\int_X c f\,dm = c \int_X f\,dm$ (homogén).

g) Legyen $\langle f_n \rangle$ nemnegatív m. fv.-ek sorozata X-en, mely m.m. konvergál az $f \geq 0$ fv.-hez, akkor

$$\int_X f\,dm \leq \sup_n \left\{ \int_X f_n\,dm \right\}$$

(Fatou-lemma).

ⓗ Legyen $\langle f_n \rangle$ nemnegatív m. fv.-ek sorozata, hogy $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ és $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, akkor $\int_X f\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,dm$ (Beppo Levi-tétel).

p $\int_X f_n = \lim \int_X f_n$ + Fatou

$\Rightarrow \int F \le \lim$

$n \le F \Rightarrow \int_X f_n \le \int F \Rightarrow$

1. $\int_X f_n\,dm \le K$

$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ m.m.

$\int_X f = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n$

i) Legyen $f \geq 0$ m. X-en. Ha $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, ahol E_i-k m. páronként diszjunkt halmazok, akkor $\int_X f\,dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\,dm$ (teljes additivitás).

3. Lebesgue-integrálható függvények

Legyen $(\bar X, \mathcal{B}, m)$ tetszőleges mértéktér és f (tetszőleges) mérhető függvény $\bar X$-en ($f: \bar X \to R_b$).

Az

$$f_+(x) \doteq \begin{cases} f(x), \text{ ha } f(x) \geq 0 \\ 0, \text{ ha } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad f_-(x) \doteq \begin{cases} 0, \text{ ha } f(x) \geq 0 \\ -f(x), \text{ ha } f(x) < 0 \end{cases}$$

szerint definiált $f_+, f_- : \bar X \to R_b$ függvényeket f pozitív ill. negatívrészének nevezzük.

f_+ és f_- nemnegatív m. fv-ek és $f = f_+ - f_-$.

Definíció. Az $f: \bar X \to R_b$ m. fv-t Lebesgue-integrálhatónak nevezzük $\bar X$-en, ha az f_+ és f_- nemnegatív m. fv-ek L-integrálhatók. Az f L-int. függvény Lebesgue-integrálján a

$$\int_{\bar X} f\, dm \doteq \int_{\bar X} f_+\, dm - \int_{\bar X} f_-\, dm$$

számot értjük.

A $\bar X$ halmazon L-integrálható függvények összességét $L_m(\bar X)$ vagy $L(\bar X)$ vagy egyszerűen csak L jelöli a továbbiakban.

Ha f korl. m., vagy nemnegatív m. és L-integrálható, úgy $f \in L$, továbbá L-integrálja megegyezik a korábban definiált L-integrállal.

Ha $\bar X = [a,b]$, úgy az $\int_a^b f(x)\, dm(x)$ v. $\int_a^b f\, dm$ jelölést használjuk.

Tétel (a L-int. tul.-i).

$f| = f_+ + f_-$

$-b| \le |a| + |b|$

a) A $f : \bar{X} \to \bar{\mathbb{R}}_b$ m. fv. $\Leftrightarrow$ L-integrálható, ha $|f| \in L$ és
$$\left| \int_{\bar{X}} f\,dm \right| \le \int_X |f|\,dm .$$

a) =>

b) Ha $f \in L \Rightarrow f$ m.m. véges.

c) Ha $E \subset \bar{X}$ m. halmaz és $f \in L(X) \Rightarrow f \in L(E)$.

d) Ha $mE = 0 \Rightarrow \exists \int_E f\,dm = 0$ $\forall$ f-re.

e) Ha f, g m. $\bar{X}$-en és $|f| \le g$, $g \in L(X) \Rightarrow f \in L(\bar{X})$
(majoráns kritérium).

f) Ha $f \in L(\bar{X})$ és $g = f$ m.m. $\Rightarrow g \in L(\bar{X})$ és $\int_{\bar{X}} f\,dm = \int_{\bar{X}} g\,dm$.

g) Ha $f \in L(\bar{X})$ és $\bar{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ (ahol E_i-k páronként diszjunkt és mérhető halmazok), akkor
$$\int_{\bar{X}} f\,dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\,dm$$
(az integrál teljesen additív).

h) Ha $f \in L$ és $c \in \mathbb{R} \Rightarrow cf \in L$ és $\int_{\bar{X}} cf\,dm = c \int_{\bar{X}} f\,dm$.
(homogén).

i) Ha $f, g \in L \Rightarrow f + g \in L$ és $\int_{\bar{X}} (f+g)\,dm = \int_{\bar{X}} f\,dm + \int_{\bar{X}} g\,dm$
(additív).

j) Ha $f \in L(\bar{X})$, akkor $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, hogy $\forall E \subset \bar{X}$ m. halmazra, amelyre $mE < \delta$
$$\left| \int_E f\,dm \right| < \varepsilon$$
(abszolút folytonos).

k) Legyen $\langle f_n \rangle$ m. fv.-ek sorozata $\bar{X}$-en, mely mértékben konvergál az f fv.-hez. Ha $\exists$ $F \in L(X)$, hogy $|f_n(x)| \le F(x)$ $\forall n \in N$ és $x \in \bar{X}$-re, akkor
$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n\,dm = \int_{\bar{X}} f\,dm$$
(nagy Lebesgue-tétel).

(l) Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-integrálható, akkor $f\in L([a,b])$ és a két integrál megegyezik.

Biz. Ha $P=\{x_i \mid a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ $[a,b]$ egy felosztása, $m_i, M_i, s(f,P), S(f,P)$ a szokásosak és $\varphi,\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ olyanok, hogy

! $\varphi(x)=\begin{cases} m_i, & x\in(x_{i-1},x_i)\\ \text{tetsz.} & \text{egyébként}\end{cases}$, $\psi(x)=\begin{cases} M_i, & x\in(x_{i-1},x_i)\\ \text{tetsz.} & \text{egyébként}\end{cases}$,

akkor φ,ψ mérhetők $[a,b]$-n, $\underline{\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)}$ m.m. és

! $\int_{[a,b]}\varphi(x)\,dm(x)=s(f,P)$, $\int_{[a,b]}\psi(x)\,dm(x)=S(f,P)$.

Legyen $\langle P_n\rangle$ olyan normális f. sorozata $[a,b]$-nek, hogy $P_n\subset P_{n+1}$ $(n\in\mathbb{N})$, $\varphi_n,\psi_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ $(n\in\mathbb{N})$ olyanok, hogy

! $\varphi_n(x)=\begin{cases} m_i^n, & x\in(x_{i-1}^n,x_i^n)\\ \text{tetsz.} & \text{egy.}\end{cases}$, $\psi_n(x)=\begin{cases} M_i^n, & x\in(x_{i-1}^n,x_i^n)\\ \text{tetsz.} & \text{egy.}\end{cases}$

φ_n,ψ_n mérhetők; $\varphi_{n+1}(x)\ge\varphi_n(x)$, $\psi_{n+1}(x)\le\psi_n(x)$ m.m. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\langle\varphi_n\rangle$ felülről, $\langle\psi_n\rangle$ alulról korlátos és

! $$\varphi_n(x)\le f(x)\le\psi_n(x) \quad \text{m.m. } \forall n\in\mathbb{N}.$$

Így az $\underline{f}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)$, $\bar f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)$ szerint értelmezett $\underline f$ és $\bar f$ határfüggvények m.m. léteznek $[a,b]$-n, mérhetőek és korlátosak, továbbá $\underline f(x)\le f(x)\le\bar f(x)$ m.m. $[a,b]$-n.

A kis Lebesgue-tétel és f R-integrálhatósága miatt

$$\int_{[a,b]}[\bar f-\underline f]\,dm=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}(\psi_n-\varphi_n)\,dm=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}\psi_n\,dm-\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}\varphi_n\,dm=$$

$$=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}s_n=0$$

következik, ami $\bar f(x)-\underline f(x)\ge0$ (m.m) miatt adja, hogy $\bar f(x)=\underline f(x)$ m.m, így $f(x)=\bar f(x)=\underline f(x)$ m.m, f mérhető $[a,b]$-n.

f tehát korlátos mérhető függvény $[a,b]$-n, ami adja hogy $f\in L[a,b]$, továbbá

$$\int_{[a,b]}f\,dm=\underbrace{\int_{[a,b]}\underline f\,dm}=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}\varphi_n\,dm=\lim_{n\to\infty}s_n=\int_a^b f(x)\,dx$$

is teljesül. Ezzel az állítást igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy a Dirichlet-függvény egy $[a,b]$ intervallumon (mivel m.m. 0) mérhető és korlátos, így L-integrálható, ugyanakkor nem R-integrálható. A L-int. általánosítása a R-integrálnak.

m) Ha $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható és $F' = f$ korlátos, akkor $f \in L([a,b])$ és

$$F(t) - F(a) = \int_a^t f(x)\,dm(x), \quad \forall t \in [a,b].$$

(A Newton-Leibniz formula)

<u>Biz.</u> (D) 61.-65. o, ill. 77.-80. o.

4. A L-integrálható függvények tere (L^1-tér)

Legyen adott az (X, β, m) obsztrakt mértéktér. Tekintsük az X-en értelmezett L-integrálható függvények halmazát. A 3. fejezet tételének h) és i) állítása miatt integrálható függvények lineáris kombinációi is integrálhatók, ezért az integrálható függvények halmaza a szokásos összeadással és skalárral való szorzással lineáris (vektor) teret alkot. Jelöljük ezt az $L^1(X)$ vagy egyszerűen L^1 szimbólummal (vagy csak L-el is lehet, ahogy korábban).

Vezessünk be az L^1-térben egy normát

$$\|f\|_{L^1} \doteq \int_X |f|\,dm$$

szerint. Nyilván igaz, hogy

$$\|\lambda f\|_{L^1} = |\lambda| \, \|f\|_{L^1},$$

$$\|f_1+f_2\|_{L^1} \leq \|f_1\|_{L^1}+\|f_2\|_{L^1}.$$

!

Hogy az is teljesüljön: $\|f\|>0$, ha $f\neq 0$, fel kell tennünk, hogy az X téren ekvivalens függvények között (amelyek tehát m.m. egyenlőek) nem teszünk különbséget, ezek L^1-nek ugyanazt az elemét határozzák meg. Speciálisan, az L^1 tér nulleleme azon függvények halmaza, amelyek m.m. egyenlőek nullával. Így olyan függvényt ad $\|f\|_{L_1}$, mely teljesíti a norma összes tulajdonságát. Ezzel a következő definícióhoz jutottunk.

1. Definíció. Az L^1 normált tér elemei az egymással ekvivalens integrálható függvények osztályai, melyben az összeadást és a számmal való szorzást a függvények szokásos összeadása és számmal való szorzása segítségével definiáljuk, a normát pedig a

$$\|f\|_{L^1} \doteq \int_X |f| \, dm$$

szerint adjuk meg.

Az L^1 normált térben $d(f,g) \doteq \|f-g\|_{L^1}$ metrikát definiál.

(Két osztály összeadása pl. azt jelenti, hogy mindkettőből kiválasztunk egy reprezentánst és vesszük az összegük osztályát. Az eredmény nem függ a reprezentánsok választásától.)

2. Definíció. Az integrálható függvények egy $\langle f_n \rangle$ sorozatának a fentebb definiált metrikában való konvergenciáját integrálban való konvergenciának nevezzük. átlagban

Tehát $\langle f_n \rangle$ integrálban konvergál az $f \in L^1$-hez, ha $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) > 0$, $\forall n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \int_{\bar{X}} |f_n - f| \, dm < \varepsilon$.

Tétel. L^1 teljes metrikus tér.

Biz. Legyen $\langle f_n \rangle$ L^1 tetsz. Cauchy-sorozata, azaz:

(*) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon)$, $\forall n, m \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \| f_n - f_m \|_{L^1} = \int_{\bar{X}} |f_n - f_m| \, dm < \varepsilon$.

Válasszunk indexek egy $\langle n_k \rangle$ sorozatát, hogy

$$\| f_{n_k} - f_{n_{k+1}} \|_{L^1} = \int_{\bar{X}} |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| \, dm < \frac{1}{2^k} .$$

Ekkor a Beppo Levi-tétel miatt az $\bar{X}$-en a $|f_{n_1}| + |f_{n_2} - f_{n_1}| + \cdots$ és így az $f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + \cdots$ sor is m.m. konvergens, továbbá legyen $f(x) = \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x)$. $\langle f_{n_k} \rangle$ tehát $\langle f_n \rangle$ egy majdnem mindenütt konvergens részsorozata.

Megmutatjuk, hogy $\langle f_{n_k} \rangle$ integrálban is konvergál f-hez. (*) miatt $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \ \forall k, l \geq n(\varepsilon) \Rightarrow$

$$\int_X |f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| \, dm(x) < \varepsilon .$$

A Fatou-lemma miatt itt elvégezhető az integráljel alatt az $l \to \infty$ határátmenet és akkor kapjuk, hogy

$$\int_X |f_{n_k}(x) - f(x)| \, dm(x) \leq \varepsilon ,$$

ami adja, hogy $f \in L^1$ és $f_{n_k} \to f$ L^1-ben. De akkor $\langle f_n \rangle$ maga is konvergál f-hez L^1-ben.

5. A négyzetesen integrálható függvények tere (az $\mathcal{L}^2$-tér)

Az $\mathcal{L}^1$-tér teljes, de nem euklideszi tér, mert a benne definiált norma nem származtatható skaláris szorzatból.

Legyen adott most is az $(\bar{X}, \mathcal{B}, m)$ absztrakt mértéktér, melyen adottak az $f : \bar{X} \to \mathbb{R}_b$ mérhető függvények, hogy az egymással ekvivalens függvényeket azonosnak tekintjük.

1. **Definíció.** Egy $f : \bar{X} \to \mathbb{R}_b$ mérhető függvényt **négyzetesen integrálhatónak** nevezünk, ha az $\int_{\bar{X}} f^2 dm$ integrál létezik és véges. Az ilyen függvények halmazát az $\mathcal{L}^2(\bar{X})$ vagy $\mathcal{L}^2$ szimbólummal jelöljük

1. **Tétel.** Két négyzetesen integrálható fv. szorzata integrálható.

Biz. Az $|f(x) g(x)| \le \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$ egyenlőtlenség és a $\mathcal{L}$-integrál tulajdonságai adják az állítást.

Következmény. Egy véges mértékű téren négyzetesen integrálható függvény $\mathcal{L}$-integrálható.

Biz. Az 1. tételt tekintsük a $g \equiv 1$ függvényre, ami négyzetesen integrálható ha a tér véges mértékű. Ekkor az $|f(x)| \le \frac{f^2(x)+1}{2}$ egyenlőtlenségből és a $\mathcal{L}$-int. tulajdonságaiból jön az állítás.

2. **Tétel.** Két $\mathcal{L}^2$-beli fv. összege is $\mathcal{L}^2$-beli.

Biz. Ez következik az $(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$ egyenlőségből és az 1. tételből, a $\mathcal{L}$-int. tulajdonságait is felhasználva.

3. **Tétel.** Ha $f \in \mathcal{L}^2$, $c \in \mathbb{R}$ tetsz. konstans, akkor $cf \in \mathcal{L}^2$.

Biz. $\int_X (cf)^2 dm = \int_X c^2 f^2 dm = c^2 \int_X f^2 dm < +\infty$ adja az állítást.

Megjegyzés. $\mathcal{L}^2$ vektortér a függvények szokásos összeadására és a számmal (skalárral) való szorzás műveletére.

Biz. A 2. és 3. tétel segítségével ellenőrizzük a vektortér axiómáinak teljesülését.

2. Definíció. Az f és g $\mathcal{L}^2$-beli függvények skaláris szorzatán az $\langle f,g\rangle \doteq \int_X f(x)\, g(x)\, dm(x)$ számot értjük.

Ellenőrizhetjük, hogy $\langle f,g\rangle$ valóban teljesíti a skaláris szorzat axiómáit. ($\langle f,f\rangle > 0$, ha $f \neq 0$ teljesüléséhez kell, hogy $f = 0$ a m.m. nullát felvevő függvények osztálya.)

3. Definíció. Az L^2 euklideszi tér a négyzetesen integrálható, egymással ekvivalens függvények osztályainak az a vektortere, melyben $\langle f,g\rangle = \int_X f(x)\, g(x)\, dm(x)$ szerint definiáljuk a skaláris szorzatot.

Megjegyzés. Az L^2 euklideszi térben (mint mindegyikben) igaz a Cauchy–Bunyakovszkij- és a Minkowski (háromszög) egyenlőtlenség a következő formában:

$$\boxed{\left(\int_X f\cdot g\, dm\right)^2 \le \left(\int_X f^2 dm\right)\left(\int_X g^2 dm\right)}, \quad \boxed{\sqrt{\int_X (f+g)^2 dm} \le \sqrt{\int_X f^2 dm} + \sqrt{\int_X g^2 dm}}.$$

4. Definíció. Az $f \in L^2$ normája $\|f\|_{L^2} \doteq \sqrt{\langle f,f\rangle} = \sqrt{\int_X f^2 dm}$, míg az $f,g \in L^2$ távolsága $d(f,g) \doteq \|f-g\|_{L^2} = \sqrt{\int_X (f-g)^2 dm}$.

Nyilvánvaló, hogy e normával ill. távolsággal az L^2 euklideszi tér normált ill. metrikus tér (hiszen ez minden euklideszi térben igaz).

5. Definíció. Az $\langle f_n \rangle$ $\mathcal{L}^2$ metrikus térbeli sorozat konvergens $\mathcal{L}^2$-ben, ha létezik $f \in \mathcal{L}^2$, hogy $\forall \varepsilon > 0$-hoz létezik $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$ esetén

$$\|f_n - f\|_{\mathcal{L}^2} \doteq \sqrt{\int_X (f_n - f)^2\, dm} < \varepsilon.$$

Az $\langle f_n \rangle$ $\mathcal{L}^2$-beli sorozat konvergenciája f-hez ezzel ekvivalens, hogy $\lim_{n\to\infty} \int_X (f_n - f)^2\, dm = 0$, ezért az $\mathcal{L}^2$-beli konvergenciát négyzetintegrálra (vagy középben) való konvergenciának is nevezik.

4. Tétel. Ha az $\langle f_n \rangle$ $\mathcal{L}^2$-beli sorozat négyzetintegrálra konvergál az $f \in \mathcal{L}^2$ elemhez, akkor mértékben is konvergál, azaz $f_n \Rightarrow f$ teljesül.

Biz. Legyen $\sigma > 0$ tetszőleges és $A_n(\sigma) = X(|f_n - f| \geq \sigma)$.
Akkor $\underline{\int_X (f_n - f)^2\, dm} \geq \int_{A_n(\sigma)} (f_n - f)^2\, dm \geq \underline{\sigma^2 m(A_n(\sigma)) \geq 0}$
a rendőr-tétel és a feltétel miatt adja, hogy $m(A_n(\sigma)) \to 0$, ami adja, hogy $f_n \Rightarrow f$ teljesül.

Megjegyzés. Ha $f_n \to f$ középben, akkor $\exists \langle f_{n_k} \rangle$, hogy $f_{n_k} \to f$ m.m.

Biz. A 4. tétel és a Riesz-féle kiválasztási tétel adja az állítást.

Megjegyzés. Legyen $\langle f_n \rangle$ olyan, hogy $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Belátható, hogy $f_n \to 0$ pontonként, de $f_n \not\to 0$ középben.

6. Definíció. Az $\langle f_n \rangle$ Cauchy-sorozat L^2-ben, ha $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists\, n(\varepsilon)$, $\forall\, n,m \geq n(\varepsilon)$ esetén $\|f_n - f_m\|_{L^2} < \varepsilon$. (*)

5. Tétel. Ha $m(\bar{X}) < +\infty$, akkor $L^2(\bar{X})$ teljes metrikus tér, azaz Hilbet-tér.

Biz. Legyen $\langle f_n \rangle$ Cauchy-sorozat $L^2(\bar{X})$-ben, akkor (*) igaz.
A C-B-egyenlőtlenségből $g \equiv 1$ és $m(\bar{X}) < +\infty$ esetén
$\left(\int_X f\, dm\right)^2 \leq m(\bar{X}) \int_{\bar{X}} f^2\, dm$ következik, így

$$\int_{\bar{X}} |f_n(x) - f_m(x)|\, dm(x) \leq \sqrt{m(\bar{X})}\ \sqrt{\int_{\bar{X}} (f_n(x) - f_m(x))^2\, dm(x)} \leq \varepsilon \sqrt{m(\bar{X})}$$

teljesül, azaz $\langle f_n \rangle$ Cauchy-sorozat az L^1-beli metrikára nézve is.
Megismételve az L^1-tér teljessége bizonyításakor alkalmazott gondolatmenetet, válasszunk ki $\langle f_n \rangle$-ből egy olyan $\langle f_{n_k} \rangle$ részsorozatot, mely m.m. konvergál egy f fv.-hez.
Ha k és l elég nagy, akkor $\int_{\bar{X}} (f_{n_k} - f_{n_l})^2\, dm < \varepsilon$.
Alkalmazva a Fatou-lemmát az $l \to \infty$ határátmenettel, akkor $\int_{\bar{X}} (f_{n_k} - f)^2\, dm < \varepsilon$ következik, ami adja, hogy $f \in L^2$ és hogy $f_{n_k} \to f$ négyzetintegrálra.
Az $\langle f_n \rangle$ Cauchy-sorozatnak tehát van konvergens részsorozata, ami (általában is) adja, hogy $\langle f_n \rangle$ konvergens és határértéke ugyancsak f.
Így $L^2(\bar{X})$ valóban teljes metrikus tér (Hilbert-tér).

6. Mérték és integrálelmélet – valószínűségszámítás

A mértékelmélet egyik legfontosabb alkalmazási területe a valószínűségszámítás.

Egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy véges mértéktér, melyre $P(\Omega)=1$.

A valószínűségszámítási és mértékelméleti fogalmak kapcsolatát mutatja az alábbi „szótár”:

Valószínűségszámítás	Mértékelmélet
$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező	$(X, \mathcal{B}, m)$ mértéktér
Ω eseménytér	X alaphalmaz
$\omega \in \Omega$ elemi esemény	$x \in X$ pont
$A \in \mathcal{A}$ esemény	$A \in \mathcal{B}$ mérhető halmaz
$\emptyset$ lehetetlen esemény	$\emptyset$
Ω biztos esemény	X
P valószínűség, $P(\Omega)=1$	m mérték
majdnem biztosan	majdnem mindenütt
valószínűségi változó	mérhető függvény
sztochasztikusan konvergens	mértékben konvergens
várható érték	integrál, átlag
véges szórású	négyzetesen integrálható
korrelálatlan	ortogonális
klasszikus valószínűség	számláló mérték
geometriai valószínűség	Hausdorff-mérték
karakterisztikus függvény	Fourier-transzformált

Megjegyzés: A függetlenségnek nincs közvetlen mértékelméleti megfelelője.

Korl. m. fv. L-int. tul. (2. Tétel)

f, g ... m. és korl.

a) $a \le f(x) \le b \ (x \in X) \Rightarrow a\,mX \le \int_X f(x)\,dm(x) \le b\,mX$ (középértéktétel) $A = a - \frac{1}{n},\ B = b + \frac{1}{n} \Rightarrow A \le y_k \le B$

b) $f(x) = C \Rightarrow \int_X f\,dm = C\,mX$, $f \ge 0 \Rightarrow \int_X f\,dm \ge 0$

c) $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ (E_i-k p. diszjunktak) $\Rightarrow$ $\int_X f\,dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\,dm$ (teljes add!)

d) $f = g$ m.m. $\Rightarrow \int_X f\,dm = \int_X g\,dm$

e) $f \ge 0$ és $\int_X f\,dm = 0 \Rightarrow f = 0$ m.m.

f) $\int_X [f+g]\,dm = \int_X f\,dm + \int_X g\,dm$ (add.)

g) $\int_X C f\,dm = C \int_X f\,dm$ (homogen.)

h) $f(x) \le g(x)\ (x \in X) \Rightarrow \int_X f\,dm \le \int_X g\,dm$

i) $\left| \int_X f\,dm \right| \le \int_X |f|\,dm$

j) $\langle f_n \rangle$ m. k. fvek sorozata X-en és $\exists K \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \le K\ (n \in \mathbb{N})$ és $f_n \Rightarrow f$ k. m. fv-hez, akkor $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,dm = \int_X f\,dm$ (kis Lebesgue-tétel)

Nemnegatív m. fv. L-int tul. (Tétel)

$f \ge 0$ mérhető fv.

a) f L-int. $\Rightarrow$ f m.m. véges

$A = X(f = +\infty) \Rightarrow [f(x)]_N = N$ A-n $\Rightarrow \int_X [f]_N = \int_A [f]_N + \int_{X-A} [f]_N \ge \int_A [f]_N = N \cdot mA$

b) $g = f$ m.m. $(g \ge 0) \Rightarrow \int_X g\,dm = \int_X f\,dm$

c) g m. és $g \ge f \Rightarrow \int_X f\,dm \le \int_X g\,dm$

$[f]_N \le [g]_N$ ------

d) Ha $\int_X f\,dm = 0 \Rightarrow f = 0$ m.m.

e) $\int_X [f+g]\,dm = \int_X f\,dm + \int_X g\,dm$ (add.)

$[f]_N + [g]_N \le f + g \Rightarrow \le [f+g]_N \le [f]_N + [g]_N$

f) $f \ge 0$, $g \ge 0 \Rightarrow \int_X C f\,dm = C \int_X f\,dm$ (hom)

$C = n$-re e)-ből

$C = \frac{1}{n}$-re $\int f = \int \frac{n}{n} f = n \int \frac{1}{n} f$ miatt, $C = \frac{m}{n}$-re ...

g) $\langle f_n \rangle$ nemnegatív m. fv-ek sor. X-en $f_n \to f \ge 0$ m.m. $\Rightarrow$

$\int_X f\,dm \le \sup_n \left\{ \int_X f_n\,dm \right\}$

(Fatou-lemma)

h) $\langle f_n \rangle$ nem.neg. m. fvek sor., hogy $0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$ és $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \Rightarrow$ $\int_X f\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,dm$ (Beppo Levi)

i) $f \ge 0$ $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ (E_i p.d.) ⊙

$\int_X f\,dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\,dm$

m) $\exists F: [a,b] \to \mathbb{R}$, $F' = f \Rightarrow f \in L[a,b]$

$\int_a^t f\,dm = F(t) - F(a)$ $\forall t \in [a,b]$

L-int. fvek int tul. (Tétel)

$f: X \to \mathbb{R}_b$ mérhető

a) $f \in L \Leftrightarrow |f| \in L$ és $\left|\int_X f\,dm\right| \le \int_X |f|$ nevezetes!

$|f| = f_+ + f_-$

b) $f \in L \Rightarrow f$ m.m. véges

c) $E \subset X$ m. h. és $f \in L(X) \Rightarrow f \in L(E)$

d $mE = 0 \Rightarrow \exists \int_E f\,dm = 0$ $\forall f$-re

e) f, g m. $|f| \le g$ és $g \in L(X) \Rightarrow f \in L(X)$ (majoráns krit.)

f) $f \in L$, $g = f$ m.m. $\Rightarrow g \in L$ és $\int_X f\,dm = \int_X g$

g) $f \in L$ és $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ (E_i-k p.d.) ~~i~~ $\int_X f\,dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\,dm$ (teljes add.

⊙-ből

h) $f \in L$, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow cf \in L$ és $\int_X cf\,dm = c \int_X f\,dm$ (homogén)

i) $f, g \in L \Rightarrow f+g \in L$ és $\int_X [f+g]\,dm = \int_X f\,dm + \int_X g\,dm$ (add.)

$|f+g| \le |f| + |g|$ miatt $f+g \in L$

j) $f \in L$, akkor $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, $E \subset X$ $mE < \delta$ $\Rightarrow \left|\int_E f\,dm\right| < \varepsilon$ (absz. folyt)

k) $\langle f_n \rangle$ m. f. sor. $f_n \Rightarrow f$. Ha $\exists F \in L$ $|f_n(x)| \le F(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ és $x \in X \Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,dm = \int_X f\,dm$ (nagy Leb.

l) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ R-int. $\Rightarrow f \in L[a,b]$; és a két int.