VI. Kiegészítések

A) A III. (Lebesgue-mérték) fejezethez

1. A számegyenes topológiája

Struktúra tétel. $\forall\, G \in \mathcal{N}$ nemüres (nyílt) halmaz előállítható legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok páronként diszjunkt komponensének egyesítéseként.

Biz. • $\forall\, x \in G$-re $\exists\, \delta = (a,b)$ komponense G-nek, hogy $x \in (a,b)$.

Legyen $F \doteq [x,+\infty) \cap CG$, $\Phi \doteq (-\infty, x] \cap CG$. F és Φ zártak, ezért $a = \sup \Phi \in \Phi$ és $b = \inf F \in F$ teljesül, továbbá $a, b \notin G$, $a < x < b$.

$\forall\, y \in (a,b)$ esetén $y \in G$ (ezaz $(a,b) \subset G$), mert ha $y \in CG$ lenne, akkor $y \in F \vee y \in \Phi$ teljesülne.

Ha $y \in F \Rightarrow b \leq y \Rightarrow y \notin (a,b)$, ami ellentmondás.

Ha $y \in \Phi \Rightarrow y \leq a \Rightarrow y \notin (a,b)$, ami ellentmondás.

$\delta \doteq (a,b)$ tehát komponense G-nek és $x \in (a,b)$.

• Ha δ_1 és δ_2 komponensek, akkor $\delta_1 \cap \delta_2 = \emptyset \vee \delta_1 = \delta_2$, mert ha $\delta_1 \cap \delta_2 \neq \emptyset$ és $\delta_1 \neq \delta_2$ teljesülne, akkor $\delta_1 = (a_1, b_1)$ ill. $\delta_2 = (a_2, b_2)$ jelöléssel a_1, b_1, a_2, b_2 valamelyike G-ben lenne, ami ellentmondás.

• Így G előáll páronként diszjunkt komponensek egyesítéseként, melyek száma legfeljebb megszámlálhatóan végtelen, hiszen mindegyikben van racionális szám, s ezek halmaza, mint $\mathbb{Q}$ részhalmaza megszámlálható.

2. Lebesgue-mérték a számegyenesen

a) Korlátos nyílt halmaz mértéke

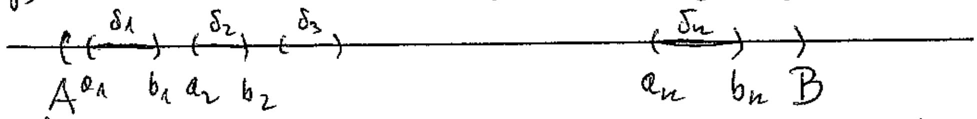
1. megjegyzés. $\boxed{\forall\, D \in \mathcal{N}\text{-re } \exists\, mD.}$

Bizonyítás.

- Ha $D = \bigcup_i \delta_i$ komponenselőállítás véges, úgy ez nyilvánvaló.
- Ha végtelen sok komponens van, úgy $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} \delta_i$, így azt kell belátni, hogy a $\sum_{i=1}^{\infty} m\delta_i$ pozitív tagú sor konvergens, melynek elegendő feltétele a részletösszeg-sorozat korlátossága.

D korlátos $\Rightarrow$ $\exists\ \Delta = (A,B)$, hogy $D \subset (A,B)$.

Legyen $S_n = \sum_{i=1}^{n} m\delta_i$ (a sor n-edik részletösszege), akkor $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \subset \Delta$ és feltehető, hogy $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, így $A \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \dots \le a_n < b_n \le B$ $\quad (\delta_i = (a_i, b_i))$



Ekkor $m\Delta = B - A = (a_1 - A) + \underline{(b_1 - a_1)} + (a_2 - b_1) + \underline{(b_2 + a_2)} + \dots$
$+ (a_n - b_{n-1}) + \underline{(b_n - a_n)} + (B - b_n)$,

ezért $S_n = \sum_{i=1}^{n} m\delta_i = \underline{(b_1 - a_1)} + \underline{(b_2 - a_2)} + \dots + \underline{(b_n - a_n)} \le m\Delta$,

tehát $\langle S_n \rangle$ valóban korlátos, így konvergens.

Továbbá $mD = \sum_{i=1}^{\infty} m\delta_i \le m\Delta$.

2. megjegyzés. $\boxed{mD \ge 0.}$ Ez nyilvánvaló

Tétel. Az $m: \mathcal{N} \to [0,\infty)$ mértékre teljesül, hogy

a) monoton: $D_1 \subseteq D_2 \Rightarrow mD_1 \le mD_2$;

b) teljesen additív: Ha $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ és $D_j \cap D_k = \emptyset$, ha $j \ne k$, úgy
$$mD = \sum_{i=1}^{\infty} mD_i$$

c) szubadditív

Biz. a) Ha $D_1 = \bigcup_i \delta_i$, $D_2 = \bigcup_k \Delta_k$, úgy $D_1 \subset D_2$ adja, hogy $\forall\ \delta_i$-re $\exists\ \Delta_k$, hogy $\delta_i \subset \Delta_k$.

Legyen $A_k = \{\delta_i \mid \delta_i \subset \Delta_k\}$, így $\sum_{\delta_i \in A_k} m\delta_i \le m\Delta_k$ adja, hogy $\underline{mD_1} = \sum_i m\delta_i = \sum_k \sum_{\delta_i \in A_k} m\delta_i \le \sum_k m\Delta_k = \underline{mD_2}$, amit bizonyítani kellett.

b) Ha $D_i = \bigcup_k \delta_k^{(i)}$, akkor $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_k \delta_k^{(i)}$,
azaz D a $\delta_k^{(i)}$ (páronként diszjunkt intervallumok, melyek végpontjai nem D-beliek) komponensekből áll elő, így
$m\,D \doteq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_k m\,\delta_k^{(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} m\,D_i$, s ezt kellett bizonyítani.

2. megjegyzés. $\boxed{\text{Ha } D \in \mathcal{N}, \text{ így } \quad m\,D = \inf\{m\,G \mid D \subseteq G,\ G \in \mathcal{N}\}}$

Biz. $D \subseteq G \implies m\,D \leq m\,G$, így $m\,D$ alsó korlát.
Másrészt $D \subseteq D$ miatt $m\,D \in \{m\,G \mid D \subseteq G, G \in \mathcal{N}\}$, így $m\,D$ pontos alsó korlát.

b) Korlátos zárt halmazok mértéke

—

c) Korlátos halmazok külső és belső mértéke

$\boxed{\text{Tétel. } \forall\, E \in \mathcal{K}\text{-ra} \quad m_* E \leq m^* E}$

Biz. Ha $D \in \mathcal{N}$ és $F \in \mathcal{Z}$ olyan halmazok, hogy $F \subseteq E \subseteq D$, akkor $m\,F \leq m\,D$.
Ezért: $m_* E \doteq \sup\{m\,F \mid F \subseteq E,\ F \in \mathcal{Z}\} \leq m\,D$
és $m_* E \leq \inf\{m\,D \mid E \subseteq D,\ D \in \mathcal{N}\} = m^* E$,
s utóbbi adja az állítást.

d) Lebesgue-mérhető halmazok

Tétel. A korlátos nyílt és zárt halmazok mérhetőek és mértékük egyenlő a korábban definiált mértékkel.

Bizonyítás.
- Ismeretes, hogy $D \in \mathcal{N}$-re $\begin{cases} m\,D = \inf\{m\,G \mid D \subseteq G,\ G \in \mathcal{N}\} \\ m\,D = \sup\{m\,F \mid F \subseteq D,\ D \in \mathcal{Z}\} \end{cases}$

Másrészt $m^* D = \inf\{m\,G \mid D \subseteq G,\ G \in \mathcal{N}\} = m\,D$,
$m_* D = \sup\{m\,F \mid F \subseteq D,\ F \in \mathcal{Z}\} = m\,D$,
s ezek adják az állítást.

- Ha $F \in \mathcal{Z}$, akkor tudjuk a következőket:

$$mF = \inf\{mD \mid F \subseteq D,\ D \in \mathcal{W}\} \doteq m^* F,$$

$$mF = \sup\{mH \mid H \subseteq F,\ H \in \mathcal{Z}\} \doteq m_* F,$$

s ez adja az állítást, hisz $m_* F = m^* F$.

Tétel (teljes additivitás). Ha $E_i \in \mathcal{K}$ mérhető halmazok, $E_j \cap E_k = \emptyset$, ha $j \neq k$ és $E \in \mathcal{K}$, akkor E mérhető és

$$mE = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i$$

Biz. Felhasználjuk a következőket:
- a belső mérték erősen additív,
- a külső mérték szubadditív,
- $m_* E \le m^* E$;

$$\sum_{i=1}^{\infty} mE_i = \sum_{i=1}^{\infty} m_* E_i \le m_* E \le m^* E \le \sum_{i=1}^{\infty} m^* E_i = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i,$$

így nyilvánvaló, hogy $mE = m_* E = m^* E = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i$.

3. Absztrakt mértékterek

Tétel. Ha $(X, \mathcal{B}, m)$ egy mértéktér, akkor

a) $E_i \in \mathcal{B}\ (i \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{B}$

b) $E_1, E_2 \in \mathcal{B}$, $E_1 \subset E_2 \Rightarrow E_2 \setminus E_1 \in \mathcal{B}$ és $m(E_2 \setminus E_1) = mE_2 - mE_1$.

Biz. a) $E_i \in \mathcal{B} \Rightarrow C_X E_i = X \setminus E_i \in \mathcal{B}\ (i \in \mathbb{N})$.

Ha $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \Rightarrow C_X E = C_X \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_X E_i \in \mathcal{B} \Rightarrow$

$E = C_X (C_X E) \in \mathcal{B}$.

b) Legyen $E = E_2 \setminus E_1$, akkor $E = E_2 \cap C_X E_1 \in \mathcal{B}$

Másrészt: $E_2 = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \Rightarrow mE_2 = mE_1 + m(E_2 \setminus E_1)$,

s utóbbi adja, hogy $m(E_2 \setminus E_1) = mE_2 - mE_1$.

B) A IV. (mérhető fv.-ek és fv.sorozatok) fejezethez

1. Mérhető függvények

1. tétel. Legyen f mérhető fv. $\bar{X}$-en. Ha g olyan fv. $\bar{X}$-en, mely majdnem mindenütt egyenlő f-el ($m\bar{X}(f \neq g) = 0$), akkor g is mérhető $\bar{X}$-en.

Biz. Ha $A = \bar{X}(f \neq g)$ és $B = \bar{X} \setminus A$, így A és B mérhetők és $mA = 0$. Nyilván B-n $f = g$.
Azt kell megmutatni, hogy $\forall a$-ra az $\bar{X}(g>a)$ nívók. mérhető.
$\bar{X}(g>a) = A(g>a) \cup B(g>a) = A(g>a) \cup B(f>a)$.
$A(g>a) \subset A$, így $mA = 0$ miatt $mA(g>a) = 0 \Rightarrow A(g>a)$ mérhető.
$B(f>a) = \bar{X}(f>a) \cap B$, $\bar{X}(f>A)$ és B mérhető $\Rightarrow B(f>a)$ mérhető.
$\bar{X}(g>a)$ két mérhető halmaz uniója, így $\forall a$-ra mérhető, tehát g mérhető.

Pl. 1) $f(x) = c$ $(x \in \bar{X})$ mérhető, mert $\bar{X}(f>a) = \begin{cases} \bar{X}, & \text{ha } c>a \\ \emptyset, & \text{ha } c \le a. \end{cases}$

2) Ha f m.m. konstans, akkor (az 1. tétel miatt) mérhető.

2. tétel. Ha f mérhető $\bar{X}$-en, akkor $\forall a \in \mathbb{R}$ esetén mérhetők az $\bar{X}(f \ge a)$, $\bar{X}(f = a)$, $\bar{X}(f \le a)$, $\bar{X}(f < a)$ nívóhalmazok is.

Biz. A következő azonosságok felhasználásával:
$\bar{X}(f \ge a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{X}\left(f > a - \frac{1}{n}\right)$; $\bar{X}(f=a) = \bar{X}(f \ge a) - \bar{X}(f>a)$;
$\bar{X}(f \le a) = \bar{X} \setminus \bar{X}(f>a)$; $\bar{X}(f<a) = \bar{X} \setminus \bar{X}(f \ge a)$.

3. tétel. a) Ha f mérhető $\bar{X}$-en és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $f+c$, cf, $|f|$, f^2, $\frac{1}{f}$ $(f \neq 0)$ is mérhetők.
b) Ha f és g véges mérhető fv.-ek $\bar{X}$-en, akkor $f-g$, $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ is mérhetők.

Biz. a) • $\bar{X}(f+c>a) = \bar{X}(f>a-c)$ miatt $f+c$ mérhető.
• Ha $c=0$, úgy $cf = 0 \Rightarrow cf$ mérhető.
Ha $c \neq 0$, úgy $\bar{X}(cf>a) = \begin{cases} \bar{X}(f>\frac{a}{c}), & \text{ha } c>0 \\ \bar{X}(f<\frac{a}{c}), & \text{ha } c<0 \end{cases}$ miatt jön
cf mérhetősége.

- $\bar{X}(|f|>a) = \begin{cases} \bar{X}, & \text{ha } a<0 \\ \bar{X}(f>a) \cup \bar{X}(f<-a), & \text{ha } a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |f|$ mérhető.
- $\bar{X}(f^2>a) = \begin{cases} \bar{X}, & \text{ha } a<0 \\ \bar{X}(|f|>\sqrt{a}), & \text{ha } \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f^2$ mérhető.
- $\bar{X}(\frac{1}{f}>a) = \begin{cases} \bar{X}(f>0), & \text{ha } a=0 \\ \bar{X}(f>0) \cap \bar{X}(f<\frac{1}{a}), & \text{ha } a>0 \\ \bar{X}(f>0) \cup \bar{X}(f<0) \cap \bar{X}(f<\frac{1}{a}), & \text{ha } a<0, \end{cases}$

ami adja $\forall a \in \mathbb{R}$-re $\bar{X}(\frac{1}{f}>a)$ mérhetőségét $\Rightarrow \frac{1}{f}$ mérhető.

b) Előbb megmutatjuk, hogy az $\bar{X}(f>g)$ halmaz mérhető.
Legyen $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ a racionális számok sorozatba rendezése, akkor igaz a következő azonosság:

$$\bar{X}(f>g) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{X}(f>r_k) \cap \bar{X}(g<r_k),$$

ahol $\bar{X}(f>r_k)$ és $\bar{X}(g<r_k)$ és ezek metszete, ill. a metszetek uniója is mérhető, így $\bar{X}(f>g)$ is.

- $\bar{X}(f-g>a) = \bar{X}(f>g+a)$ adja az állítást, mert $g+a$ is mérhető
- $f+g = f-(-g)$, f és $-g$ mérhetősége miatt adja $f+g$ mérhetőségét.
- $f \cdot g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2-(f-g)^2\right]$ és az, hogy $(f+g)^2$ és $(f-g)^2$, ill. ezek különbsége is mérhető adja azt, hogy $f \cdot g$ is mérhető.
- $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ és hogy $\frac{1}{g}$ ill $f \cdot \frac{1}{g}$ is mérhető adja, hogy $\frac{f}{g}$ mérhető.

3. Zárt intervallumon mérhető fv.ek szerkezete

Tétel. Egy $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény mérhető.

Biz. Megmutatjuk, hogy az $\bar{X}(f \leq a)$ nívóhalmazok zártak, ami azzal ekvivalens, hogy tartalmazzák minden torlódási pontjukat.
Legyen x_0 egy tetszőleges torlódási pontja $\bar{X}(f\leq a)$-nak, akkor $\exists\, x_n \in \bar{X}(f \leq a)$ sorozat, hogy $x_n \to x_0$.
Ekkor $f(x_n) \leq a$ $(n \in \mathbb{N})$, melyből – f folytonossága miatt – jön, hogy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \leq a$, azaz $x_0 \in \bar{X}(f\leq a)$.
Ha $\bar{X}(f\leq a)$ zárt, akkor mérhető. Ezután az $\bar{X}(f>a) = \bar{X} \setminus \bar{X}(f\leq a)$ egyenlőség adja f mérhetőségét.

C) Az V. (Lebesgue-integrál) fejezethez

1. Korlátos mérhető fv.-ek Lebesgue-integrálja

1.Tétel (a Lebesgue-összegek tulajdonságai).
Legyen $f : \bar{X} \to \mathbb{R}$ korlátos mérhető függvény, akkor

a) ha $\lambda = \max_k (y_{k+1} - y_k)$, úgy $0 \leq S - s \leq \lambda m\bar{X}$;

b) $\exists \sup_P \{s\} = \alpha$, $\inf\{S\} = \beta$, $\alpha = \beta$, mely független A és B választásától.

Biz. a) $y_k < y_{k+1}$ miatt $0 \leq S-s = \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k) me_k \leq \lambda \sum_{k=0}^{n-1} me_k = \lambda m\bar{X}$.

b) A bizonyítást több lépésben végezzük:

- Jelölje s_0 és S_0 az $A < f(x) < B$ esetén az $[A,B]$ $A = y_0 < y_1 < \dots < y_n = B$ felosztáshoz tartozó alsó ill. felső Lebesgue-összegeket.
Ha az $y_i < \bar{y} < y_{i+1}$ új osztásponttal finomítjuk a beosztást, akkor az új beosztáshoz tartozó s alsó ill. S felső L-összegekre igaz, hogy:
$$s_0 \leq s \quad , \quad S \leq S_0 .$$
Ugyanis, ha $e_i' = \bar{X}(y_i \leq f < \bar{y})$, $e_i'' = \bar{X}(\bar{y} \leq f < y_{i+1})$, akkor $e_i' \cap e_i'' = \emptyset$, $e_i' \cup e_i'' = e_i$, ami adja, hogy
$$s_0 = \sum_{k=0}^{n-1} y_k me_k = y_i me_i + \sum_{k \neq i} y_k me_k = y_i me_i' + y_i me_i'' + \sum_{k \neq i} y_k me_k \leq$$
$$\leq y_i me_i' + \bar{y} me_i'' + \sum_{k \neq i} y_k me_k = s \quad \Rightarrow s_0 \leq s .$$
$S \leq S_0$ hasonlóan bizonyítható.
Ebből következik, hogy a beosztás finomításánál az alsó L-összegek nem csökkennek, a felsők pedig nem nőnek.

- Bármely alsó L-összeg kisebb vagy egyenlő bármely felső L-összegnél.
Jelölje P_1 és P_2 az $[A,B]$ két tetszőleges beosztását, melyekhez az s_1, s_2 ill. S_1, S_2 L-összegek tartoznak.
Legyen $P = P_1 \cup P_2$, melyhez az s_3, S_3 L-összegek tartoznak.
P finomítása P_1 és P_2-nek is, így a fentiek szerint
$$s_1 \leq s_3 \leq S_3 \leq S_2 ,$$
és ezt kellett bizonyítani.

- Utóbbi adja, hogy az alsó L-összegek felülről, a felsők alulról korlátos halmazt adnak, így $\exists\ \alpha = \sup\{s\}$ és $\beta = \inf\{S\}$.
  Továbbá $\forall$ rögzített S_0-ra $\alpha = \sup\{s\} \le S_0$, így
  $\alpha \le \inf\{S\} = \beta$, azaz $\alpha \le \beta$, ill.
  $s \le \alpha \le \beta \le S$, így az a) állítás miatt
  $0 \le \beta - \alpha \le S - s \le \lambda\, m\bar{X}$, ami már adja, hogy $\alpha = \beta$ kell hogy teljesüljön, hiszen $m\bar{X} < \infty$ és λ tetszőleges kicsi lehet.
  Tehát $\lambda \to 0$ esetén $s \to \alpha = \beta \leftarrow S$.
- Ha pl. A helyett az A^* alsó korlátot tekintjük, úgy A^* mindig tekinthető osztópontnak és könnyen belátható, hogy az $[A, B]$ ill. $[A^*, B]$-hez tartozó alsó összegek megegyeznek, finomítva a beosztást mindkettő $\alpha = \beta$-hoz tart, így a közös érték független a korlátok választásától.

2. Tétel

a) Ha f mérhető $\bar{X}$-en és $a \le f(x) \le b$ $(x \in \bar{X}) \Rightarrow \boxed{a\, m\bar{X} \le \int_{\bar{X}} f\,dm \le b\, m\bar{X}}$.
(középérték-tétel)

Biz. Ha $n \in N$ és $A = a - \frac{1}{n}$, $B = b + \frac{1}{n}$ $\Rightarrow A < f(x) < B$ $(x \in \bar{X})$.
Ha $P = \{y_i \mid A = y_0 < y_2 < \dots < y_n = B\}$, akkor $A \le y_k \le B$ miatt

$$A \sum_{k=0}^{n-1} m e_k \le \sum_{k=0}^{n-1} y_k\, m e_k \le B \sum_{k=0}^{n-1} m e_k, \text{ azaz } A\, m\bar{X} \le s \le B\, m\bar{X}.$$

Ha $\lambda \to 0$, akkor $s \to \int_{\bar{X}} f\,dm$, ezért

$$\left(a - \tfrac{1}{n}\right) m\bar{X} \le \int_{\bar{X}} f\,dm \le \left(b + \tfrac{1}{n}\right) m\bar{X},$$

amiből $n \to \infty$ esetén következik az állítás.

b) Ha $f(x) = c \Rightarrow \int_{X} f\,dm = c\, m\bar{X}$; ha $f \ge 0 \Rightarrow \int_{\bar{X}} f\,dm \ge 0$;
ha $E \subset \beta$ és $mE = 0 \Rightarrow \int_{E} f\,dm = 0$ (f korl. mérh. fv.).

Biz. Ezek következnek a)-ból.
$f(x) = c$ esetén $a = b = c$ választható, így $c\, m\bar{X} \le \int_{\bar{X}} f\,dm \le c\, m\bar{X}$ adja az állítást.
Ha $f \ge 0$, úgy $a = 0$ mellett $0 \le \int_{\bar{X}} f\,dm$ nyilván igaz.
Ha $\bar{X} = E$ és $mE = 0$, úgy $0 \le \int_{E} f\,dm \le 0 \Rightarrow \int_{E} f\,dm = 0$.

C) Ha E_i páronként diszjunkt mérhető halmazok, hogy $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, akkor $\boxed{\int_X f\,dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\,dm}$ (teljes additivitás).

Biz. • Ha $X = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $A < f < B$, $P = \{y_i \mid A = y_0 < y_1 < \dots < y_n = B\}$ továbbá $e_k = X(y_k \le f < y_{k+1})$, $e_k' = E_1(y_k \le f < y_{k+1})$, $e_k'' = E_2(y_k \le f < y_{k+1})$, akkor $e_k = e_k' \cup e_k''$ és $e_k' \cap e_k'' = \emptyset$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$, ezért

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k m e_k = \sum_{k=0}^{n-1} y_k m e_k' + \sum_{k=0}^{n-1} y_k m e_k'',$$ azaz $\underline{s = s_1 + s_2}$, ahol s, s_1 és s_2 f alsó L-összegeit jelöli az X, E_1 ill E_2-n.

Ha $\lambda \to 0$, akkor $s \to \int_X f\,dm$, $s_1 \to \int_{E_1} f\,dm$, $s_2 \to \int_{E_2} f\,dm$ $\Rightarrow$

$$\int_X f\,dm = \int_{E_1} f\,dm + \int_{E_2} f\,dm.$$

Ebből pedig véges esetre, azaz ha $X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ $(E_k \cap E_j = \emptyset)$ esetén igaz az állítás, úgy $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cup E_{n+1}$ miatt $n+1$-tagra is igaz, így a teljes indukció elve alapján jön az állítás.

• Ha $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ $(E_k \cap E_j = \emptyset$ $k \ne j$-re$)$, akkor $mX = \sum_{i=1}^{\infty} m E_i$, ami adja, hogy $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} m E_i = 0$.

Legyen $R_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i$, akkor $X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \cup R_n$, ezért az előbbiek miatt

$$(*) \qquad \int_X f\,dm = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f\,dm + \int_{R_n} f\,dm.$$

Ugyanakkor a középérték-tétel miatt $A\,m R_n \le \int_{R_n} f\,dm \le B\,m R_n$, ahonnan $m R_n \to 0$ miatt $\int_{R_n} f\,dm \to 0$ következik.

Ekkor már $(*)$ adja állításunkat.

<u>Megjegyzés</u>. A c) tétel segítségével egyszerűen kapjuk a 2. Tétel d) és e) állítását.

2) Nemnegatív mérhető fv.-ek $\mathcal{L}$-integrálja

Tétel (az integrál tulajdonságai). $f \geq 0$ mérhető $\bar{X}$-en, akkor

a) Ha f $\mathcal{L}$-int.-tó, akkor m.m. véges.

Biz. Legyen $C = \bar{X}(f=\infty)$, akkor $\forall$ N-re $[f(x)]_N = N$, ha $x \in C$, így $\int\limits_{\bar{X}} [f]_N = \int\limits_C [f]_N\, dm + \int\limits_{\bar{X} \setminus C} [f]_N\, dm \geq \int\limits_C [f]_N\, dm = N \cdot mC$.

Ha $mC > 0$ lenne, akkor azt kapnánk, hogy $\int\limits_{\bar{X}} [f]_N \to \infty$, azaz f nem lenne integrálható, ami ellentmondás $\Rightarrow$ $mC = 0$, azaz f m.m. véges.

b) Ha $g = f$ m.m ($g \geq 0$), akkor $\int\limits_{\bar{X}} g\, dm = \int\limits_{\bar{X}} f\, dm$.

Biz. g nyilván mérhető. Legyen $C = \bar{X}(f=g)$ és $D = \bar{X}(f \neq g)$.
Ha $x \in C$, akkor $[f(x)]_N = [g(x)]_N$ $(N=1,2,\dots) \Rightarrow \int\limits_C f\, dm = \int\limits_C g\, dm$,
de $mD = 0$ miatt $\int\limits_D [f]_N\, dm = \int\limits_D [g]_N\, dm = 0 \Rightarrow \int\limits_D f\, dm = \int\limits_D g\, dm = 0$,
ezért $\int\limits_{\bar{X}} f\, dm = \int\limits_{\bar{X}} g\, dm$.

c) Ha g mérhető és $f \leq g$, akkor $\int\limits_{\bar{X}} f\, dm \leq \int\limits_{\bar{X}} g\, dm$.

Biz. Nyilván $[f]_N \leq [g]_N \Rightarrow \int\limits_{\bar{X}} [f]_N \leq \int\limits_{\bar{X}} [g]_N$, ami a $N \to \infty$ határátmenettel adja az állítást.

d) Ha $\int\limits_{\bar{X}} f\, dm = 0$, akkor $f = 0$ m.m.

Biz. Ekkor $0 \leq \int\limits_{\bar{X}} [f(x)]_N\, dm(x) \leq \int\limits_{\bar{X}} f\, dm = 0 \Rightarrow [f]_N = 0$ m.m. $\forall$ N-re.
Legyen $A = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \bar{X}([f]_N \neq 0)$, akkor $mA = 0$.
Ha $x \in \bar{X} \setminus A$, akkor $\lim\limits_{N \to \infty} [f(x)]_N = f(x)$ miatt $f(x) = 0 \Rightarrow$ $f = 0$ m.m.

e) Ha $f, g \geq 0$ mérhetőek, úgy $\int\limits_{\bar{X}} (f+g)\, dm = \int\limits_{\bar{X}} f\, dm + \int\limits_{\bar{X}} g\, dm$ (additivitás).

Biz. • Ha N természetes szám, akkor nyilván

$$[f(x)]_N + [g(x)]_N \le f(x) + g(x) \quad (x \in \bar{X}),$$

ezért $\int_{\bar{X}} [f]_N \, dm + \int_{\bar{X}} [g]_N \, dm \le \int_{\bar{X}} [f+g] \, dm$, ahonnan $N \to \infty$ esetén következik, hogy $\boxed{\int_X f \, dm + \int_X g \, dm \le \int_X (f+g) \, dm}$.

• $[f(x)+g(x)]_N \le [f(x)]_N + [g(x)]_N \quad \forall x \in \bar{X}$, mert

→ ha $x_0 \in \bar{X}$-re $f(x_0) \le N$, $g(x_0) \le N$, akkor

$$\underline{[f(x_0)+g(x_0)]_N} \le f(x_0) + g(x_0) = \underline{[f(x_0)]_N + [g(x_0)]_N};$$

→ ha $x_0 \in \bar{X}$-re $f(x_0)$ vagy $g(x_0)$ nagyobb N-nél, akkor

$$\underline{[f(x_0)+g(x_0)]_N} = N \le \underline{[f(x_0)]_N + [g(x_0)]_N}.$$

Így $\int_{\bar{X}} [f+g]_N \, dm \le \int_{\bar{X}} [f]_N \, dm + \int_{\bar{X}} [g]_N \, dm \le \int_{\bar{X}} f \, dm + \int_{\bar{X}} g \, dm$,

melyből $N \to \infty$ esetén

$$\int_{\bar{X}} (f+g) \, dm \le \int_X f \, dm + \int_{\bar{X}} g \, dm$$

következik, ami $\boxed{}$-gal együtt adja az állítást.

f) Ha $f \ge 0$ mérhető, $c \ge 0$ konstans $\Rightarrow \boxed{\int_{\bar{X}} cf \, dm = c \int_{\bar{X}} f \, dm}$

(homogenitás).

Biz. $c=0$-ra az állítás nyilván igaz.

$c = n$ (n term. szám) az e) állítás miatt

$$\int_X nf \, dm = \int_X f \, dm + \dots + \int_X f \, dm = n \int_X f \, dm.$$

Ebből $\int_X f \, dm = \int_X \frac{n}{n} f \, dm = n \int_X \frac{1}{n} f \, dm \Rightarrow \int_X \frac{1}{n} f \, dm = \frac{1}{n} \int_X f \, dm$

következik, ezaz $c = \frac{1}{n}$-re is igaz az állítás.

Ha $c = r = \frac{n_1}{n_2}$ pozitív rac. szám, akkor az előbbiek szerint

$$\underline{\int_X r f \, dm} = \int_X \frac{n_1}{n_2} f \, dm = n_1 \int \frac{1}{n_2} f \, dm = \frac{n_1}{n_2} \int_X f \, dm = \underline{r \int_X f \, dm}.$$

Ha $c>0$ tetsz. valós sz., akkor $\exists\, r_n$ növekvő és R_n csökkenő sorozat, hogy $r_n < c < R_n$, $r_n \to c$, $R_n \to c \Rightarrow r_n f \le cf \le R_n f$ miatt $r_n \int_X f \, dm \le \int_X cf \, dm \le R_n \int_X f \, dm$

ami $n \to \infty$ esetén adja az állítást ebben az esetben is

3) Lebesgue-integrálható függvények

Tétel (a L-int. tulajdonságai).

a) Az $f:\bar{X}\to\bar{\mathbb{R}}_b$ mérhető fv. $\Leftrightarrow$ L-integrálható, ha $|f|\in L$ és

$$\left|\int_X f\,dm\right| \le \int_X |f|\,dm .$$

Biz. Legyen $f\in L$, akkor $|f(x)|=f_+(x)+f_-(x)$ miatt $|f|\in L$ és fordítva.
Másrészt $\left|\int_X f\,dm\right| = \left|\int_X f_+dm-\int_X f_-dm\right| \le \int_X f_+dm+\int_X f_-dm=\int_X |f|\,dm$,
s ezzel bizonyítottuk az állítást.

b) Ha $f\in L \Rightarrow f$ m.m. véges.

Biz. Ha $f\in L\Rightarrow |f|\in L$, de $|f|\ge 0$, így 2) a) miatt $|f|$ m.m. véges $\Rightarrow f$ m.m. véges.

h) Ha $f\in L$ és $c\in\mathbb{R}$ konstans, akkor $cf\in L$ és $\int_X cf\,dm=c\int_X f\,dm$.

Biz. $c=0$-ra nyilván igaz az állítás.
Ha $c>0$ és $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$, akkor $cf(x)=cf_+(x)-cf_-(x)$, ahol cf_+ és cf_- nemnegatív mérhető függvények és integrálhatók, továbbá

$$\int_X cf\,dm = \int_X cf_+\,dm-\int_X cf_-\,dm = c\left(\int_X f_+dm-\int_X f_-dm\right)=c\int_X f\,dm,$$

ezért igaz az állítás.
Ha $c<0$, így $c=-1$-re $(-f)_+=f_-$ és $(-f)_-=f_+$ miatt

$$\int_X -f\,dm=\int_X f_-dm-\int_X f_+dm=-\int_X f\,dm .$$

Ha $c<0$ tetszőleges, akkor

$$\int_X cf\,dm=-\int_X |c|f\,dm=-|c|\int_X f\,dm=c\int_X f\,dm,$$

s ezzel minden esetben igaz az állítás.

i) Ha $f,g\in L\Rightarrow f+g\in L$ és $\int_X (f+g)\,dm=\int_X f\,dm+\int_X g\,dm$.

Biz. • $|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|$ miatt jön, hogy $f+g\in L$.
• $\bar{X}=\bigcup_{i=1}^{6}E_i$, ahol $E_1=\bar{X}(f\ge0,g\ge0)$, $E_2=\bar{X}(f<0,g<0)$,
$E_3=\bar{X}(f>0,g<0,f+g\ge0)$; $E_4=\bar{X}(f\ge0,g<0,f+g<0)$
$E_5=\bar{X}(f<0,g\ge0,f+g\ge0)$, $E_6=\bar{X}(f<0,g\ge0,f+g<0)$,
így elegendő megmutatni, hogy $\int_{E_i}(f+g)\,dm=\int_{E_i}f\,dm+\int_{E_i}g\,dm$ $(i=1,\dots,6)$