Lajkó Károly

MÉRTÉK- ÉS INTEGRÁLELMÉLET

matematika levelező mesterképzés

NYÍREGYHÁZA

2009

Tartalomjegyzék

I. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS $\mathbb{R}$-ben

(Anal II. 33.–67., 80.–84.)

1. Primitív függvény, határozatlan integrál

(Anal II. 33.–36.)

Definíció. Legyen adott az $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ függvény. Az $F:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ fv-t f primitív függvényének (határozatlan integráljának) nevezzük, ha differenciálható és $F'=f$.

Jelölés: $\int f$, $\int f(x)\,dx$

1. Tétel. Ha $f,F:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$, hogy $F'=f$ ($F=\int f$), úgy $G:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ primitív fv-e (határozatlan int-ja) f-nek, ha $\exists\, C\in\mathbb{R}$, hogy $\boxed{G(x)=F(x)+C}$

Alapintegrálok: Az alap-deriváltak ismeretében egyszerűen összeállítható egy „táblázat".

2. Tétel. Ha adott $f,g:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$-re $\exists\int f,\int g$ és $p,q\in\mathbb{R}$ adott, akkor $\exists\int(pf+qg)$ és $C\in\mathbb{R}$, hogy $\forall\, x\in\langle a,b\rangle$-re

$$\boxed{\int[p\,f(x)+q\,g(x)]\,dx=p\int f(x)\,dx+q\int g(x)\,dx+C}$$

3. Tétel. (parciális int-ás tétele) Ha $f,g:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ differenciálhatók és $\exists\int f'g$ $\Rightarrow$ $\exists\int fg'$ és $C\in\mathbb{R}$, hogy $\forall\, x\in\langle a,b\rangle$-re

$$\text{(P)}\quad\boxed{\int f(x)\,g'(x)\,dx=f(x)\,g(x)-\int f'(x)\,g(x)\,dx+C}$$

Megjegyzés. Bizonyos szorzatok integrálása így végezhető.

4. Tétel (helyettesítéses int. t.) Ha $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$, $g:\langle c,d\rangle\to\langle a,b\rangle$ olyanok, hogy $\exists\, g'$ és $\int f$ $\Rightarrow$ $\exists\int(f\circ g)\,g'$ és $C\in\mathbb{R}$, hogy

$$\text{(H)}\quad\boxed{\int f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int f(t)\,dt\Big|_{t=g(x)}+C}=\boxed{F(g(x))+C}$$

Ha $\exists\, g^{-1}$ $\Rightarrow$ (H')

$$\boxed{\int f(x)\,dx=\int f(g(t))\,g'(t)\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)}+C}$$

2) A Riemann-integrálhatóság fogalma

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos fv-ekkel foglalkozunk.

1. Def: $P = \{x_i \mid a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \subset [a,b]$ $[a,b]$ egy felosztása. $x_1, \dots, x_n$ az osztáspontok, $[x_{i-1}, x_i]$ a f.o. részintervallumai, $\|P\| \doteq \sup_i \{\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \dots, n\}$ a felosztás finomsága. P_2 finomítása (továbbosztása) P_1-nek, ha $P_1 \subset P_2$. $\langle P_k \rangle$ normális felost. sorozata $[a,b]$-nek, ha $\lim_{k\to\infty} \|P_k\| = 0$.

2. Def. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ adott korl. fv., P egy felosztása $[a,b]$-nek, úgy $M_i = \sup_i f([x_{i-1}, x_i])$, $m_i = \inf_i f([x_{i-1}, x_i])$ mellett a

$$\boxed{s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i}, \quad \boxed{S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i x_i}, \quad \boxed{O(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i}$$

számokat az f P-hez tartozó alsó, felső, oszcillációs összegének, míg $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ esetén a $\boxed{\sigma(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i}$ számot az f P-hez és $t_1, \dots, t_n$-hez tart. integrálközelítő összegének nevezzük.

(Geometriailag ezek bizonyos „területek".)

1. Tétel. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korl. fv., akkor

a) $s(f,P) \le \sigma(f,P) \le S(f,P)$ $(\forall P)$; b) $s(f,P_1) \le s(f,P_2)$ és $S(f,P_2) \le S(f,P_1)$, ha $P_1 \subset P_2$,

c) $s(f,P_1) \le S(f,P_2)$ $\forall P_1, P_2$-re.

3. Def. Az $\boxed{\underline{I} = \underline{\int_a^b} f = \sup_P \{s(f,P)\}}$, $\boxed{\overline{I} = \overline{\int_a^b} f = \inf \{S(f,P)\}}$ számokat az f $[a,b]$-feletti alsó, ill. felső Darboux-int-nak nev.

Megjegyzés. $\underline{I}, \overline{I} \in \mathbb{R}$ és $\underline{I} \le \overline{I}$, $s(f,P) \le \underline{I} \le \overline{I} \le S(f,P)$, $0 \le O(f,P)$.

Pl. a) $f(x) = c$ $(x \in [a,b])$ esetén $\underline{I} = \overline{I}$. b) $\exists f$, $\underline{I} \ne \overline{I}$ (Dirichlet fv.)

4. Def. f Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha $\underline{I} = \overline{I} = I$. I-t f $[a,b]$ feletti R-int-jának nev. Jel: $\int_a^b f$, $\int_a^b f(x)dx$.

Geometriai tartalom: görbe alatti terület.

2. Tétel (Darboux): Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korl., akkor $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, $[a,b]$ $\forall$ P felosztására, hogy $\|P\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow$ $\boxed{S(f,P) - \overline{I} < \varepsilon}$; $\boxed{\underline{I} - s(f,P) < \varepsilon}$

Következmény $\forall (P_k)$ norm. fv. sorozatra

a) $\exists \lim_{k\to\infty} s(f,P_k) = \underline{J}$, $\lim_{k\to\infty} S(f,P_k) = \overline{J}$ és $\lim_{k\to\infty} O(f,P_k) = \overline{J} - \underline{J}$

b) $\exists\ \sigma^1(f,P_k)$ és $\sigma^2_k(f,P_k)$, hogy $\exists \lim_{k\to\infty} \sigma^1(f,P_k) = \underline{J}$, $\lim_{k\to\infty} \sigma^2(f,P_k) = \overline{J}$.

3) A R-int-tóság kritériumai és elegendő feltételei,

1.–4. Tétel – $\sigma(f,P)$-vel ; $-\sigma(f,P_k)$-val ; $-O(f,P)$-vel ; $-O(f,P_k)$-val

Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. fv. $\Leftrightarrow$ R-int-tó $[a,b]$-n, ha $[a,b]$ $\forall P_k$ normális felosztássorozatához tartozó $\forall$ $\sigma(f,P_k)$ int. közelítő összegsorozat konvergens (Ez lehetne egy másik definíció)

5. Tétel. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos fv. R-int-tó. (~~szükség~~ Elegendő felt.)
6. Tétel. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton fv. R-int-tó (Elegendő felt.).
7. Tétel. f R-tó $[a,b]$-n és $[c,d]\subset[a,b] \Rightarrow$ R-tó $[c,d]$ is (— " —).
8. Tétel (additivitás az intervallumra): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ adott k. fv., $c\in[a,b]$ és f R-tó $[a,c]$ és $[c,b]$-n $\Rightarrow$ $[a,b]$-n is és
$$\boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^d f}$$
(Ez is egy elegendő felt.)
9. Ha az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korl. fv. véges sok pont kivételével folyt $\Rightarrow$ R-int-tó $[a,b]$-n.
10. Tétel (Lebesgue-kritérium) ... átnézet a Lebesgue-mértékkel

4) Műveleti tulajdonságok, egyenlőtlenségek, középértéktételek

1. Tétel. Ha $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-tók $p,q\in\mathbb{R}$ adott, akkor $pf+qg$ is az és
$$\boxed{\int_a^b (pf+qg) = p\int_a^b f + q\int_a^b g}$$

Megj.: Ez igaz véges ~~sokra~~ is, ill. f^2, $f g$, $|f|$, $\frac{f}{g}$ $(|g(x)|\ge c>0)$.

2. Tétel. a) f,g R-int-ók $[a,b]$-n és $f\le g$ $\Rightarrow$ $\boxed{\int_a^b f \le \int_a^b g}$

b) $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$

c) $m\le f\le M$, és $0\le g$ $\Rightarrow$ $\boxed{m\int_a^b g \le \int_a^b f\cdot g \le M\int_a^b g}$ kö-tétel

$\boxed{m(b-a)\le \int_a^b f \le M(b-a)}$

d) f folyt $\Rightarrow \exists\, c\in[a,b]$ $\boxed{\int_a^b f = (b-a)f(c)}$

5) Newton-Leibniz-formula, az int. kiszámítása

1. Def. Ha f R-ható $[a,b]$-n, úgy $\int_a^a f \doteq 0$, $\int_b^a f \doteq -\int_a^b f$.
Az $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\boxed{F(x) \doteq \int_a^x f(t)\,dt}$ fv-t f integráljának, mint a felső határ függvényének (területmérő v. integrálfüggvényének) nevezzük.

1. Tétel. a) Ha f R-ható $[a,b]$-n, úgy F (int. fv) folytonos.
b) Ha f R-ható $[a,b]$-n és folyt. $x\in[a,b]$-ben $\Rightarrow$ F diffható x-ben és $F'(x)=f(x)$.
c) Ha f folytonos $[a,b]$ (úgy R-ható), akkor $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in[a,b]$, azaz F (int. fv.) primitív fv-e f-nek. ($\exists$ p. fv.!)

2. Tétel. (Newton-Leibniz-formula). Ha $f, F:[a,b]\to\mathbb{R}$ olyan, hogy
a) f R-integrálható
b) F folytonos $[a,b]$-n és diffható $]a,b[$-n, ill. $F'(x)=f(x)$ $]a,b[$-n.

akkor
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)} \quad \left(\doteq \left[F(x)\right]_a^b\right)$$

Az R-int. kiszámításában segítenek:

3. Tétel (parc. int. R-int.-ra) $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonosan diffhatók, úgy
$$\boxed{\int_a^b f g' = f(b)g(b)-f(a)g(a) - \int_a^b f' g}$$

4. Tétel (helyettesítéses R-int.) $g:[a,b]\to[c,d]$ folytonosan diffható, $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ folytonos, akkor
$$\boxed{\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx}$$

6) Fv. sorozatok és fv. sorok tagonkénti int-sága és diff-sága

1. Tétel. $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-hatók, $\langle f_n\rangle$ (ill. $\sum f_n$) egyenl.-en konv. $[a,b]$-n az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fv-hez $\Rightarrow$ $\exists \int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$ (ill. $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n$).
2. Tétel (diff-tóság — 57.o.).

II. RIEMANN-INTEGRÁL $\mathbb{R}^n$-ben

(Anal III. 51.–82.)

Itt most a jobban követhető $\mathbb{R}^2$-beli felépítést adjuk meg.

1) R-integrál téglalapon ($\mathbb{R}^2$-beli intervallumon).

(A fogalom és a tul.-ok szoros analógiát mutatnak a valóssal.)

$f: \underbrace{Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]}_{\text{(ez egy téglalap } \mathbb{R}^2\text{-ben)}} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ korlátos fv.-ekkel foglalkozunk

1. Def. A $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ tégla mértékén (területén) a

$$\boxed{m(Q) \doteq (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}$$ számot értjük

2. Def. Ha Q adott téglalap és

$P_1 = \{x_{1i} \mid a_1 = x_{10} < x_{11} < \dots < x_{1n} = b_1\}$, $P_2 = \{x_{2i} \mid a_2 = x_{20} < x_{21} < \dots < x_{2m} = b_2\}$

az $[a_1, b_1]$ ill. $[a_2, b_2]$ intervallumok egy felosztása, úgy a $P = P_1 \times P_2$ halmazt a Q egy felosztásának ~~nevezzük~~,

a $T_{ij} \doteq [x_{1\,i-1}, x_{1i}] \times [x_{2\,j-1}, x_{2j}]$ $(i = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2, \dots, m)$ téglalapokat a P felosztás résztéglalapjainak (részintervallumok),

a $\|P\| = \sup\limits_{i,j}\{\operatorname{diam} T_{ij}\}$ számokat (a résztéglalapok átlói hosszának szupremumát) a P finomságának nevezzük.

P^2 finomítása (továbbosztása) P^1-nek, ha $P^1 \subset P^2$.

$\langle P^k \rangle$ normális felosztássorozata Q-nak, ha $\lim\limits_{k \to \infty} \|P^k\| = 0$

2. Def. Ha $f: Q \to \mathbb{R}$ korlátos fv., P egy felosztása Q-nak a T_{ij} résztéglalapokkal, akkor

$M_{ij} = \sup\limits_{i,j} f(T_{ij})$; $m_{ij} = \inf\limits_{i,j} f(T_{ij})$ mellett a

$s(f,P) = \sum\limits_{i,j} m_{ij}\, m(T_{ij})$; $S(f,P) = \sum\limits_{i,j} M_{ij}\, m(T_{ij})$; $\mathcal{O}(f,P) = S(f,P) - s(f,P)$

számokat az f P-hez tartozó alsó, felső és oszcillációs összegének, míg $t_{ij} \in T_{ij}$ esetén a $\sigma(f,P) = \sum\limits_{i,j} f(t_{ij})\, m(T_{ij})$ számot az f P-hez és a t_{ij}-khez tartozó integrálközelítő összegének nev.

(Ezek bizonyos „térfogatok".)

Most is igaz ez

1. Tétel. Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ korl. fv., úgy

a) $s(f,P) \le \sigma(f,P) \le S(f,P)$ $(\forall P)$; b) $s(f,P^1) \le s(f,P^2)$, $S(f,P^2) \le S(f,P^1)$, ha $P^1 \subset P^2$

c) $s(f,P^1) \le S(f,P^2)$ $\forall P^1, P^2$.

3. Def. Az $\underline{J} = \underline{\int_Q} f = \sup_P \{s(f,P)\}$ és $\overline{J} = \overline{\int_Q} f = \inf_P \{S(f,P)\}$ számokat f Q feletti alsó, ill. felső Darboux-int.-jának nev.

Megjegyzés: $\underline{J}, \overline{J} \in \mathbb{R}$, $\underline{J} \le \overline{J}$, $0 \le \overline{J} - \underline{J} \le \mathcal{O}(f,P)$

Pl. 1) $f(x) = k$ $(x \in Q)$ $\Rightarrow \underline{J} = \overline{J}$; $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \text{ és } \forall \text{ k. rac.} \\ 0, & \text{egyébk.} \end{cases} \Rightarrow \underline{J} \ne \overline{J}$.

4. Def. f R-integrálható Q-n, ha $\underline{J} = \overline{J} = J$. J-t az f Q feletti R-integráljának nevezzük. Jel: $\int_Q f$ $\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy$ $\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dx\,dy$.

Geometriai tartalom: felület alatti térfogat, 3dim mérték)

2. Tétel (Darboux). Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ korl. fv., akkor $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta(\varepsilon) > 0$, Q $\forall$ P felosztására, hogy $\|P\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow$

$$S(f,P) - \overline{J} < \varepsilon \quad ; \quad \underline{J} - s(f,P) < \varepsilon .$$

Következmény: mint korábban, csak Q $\forall$ $\langle P^k \rangle$ norm. f.o. sorozata

2) A R-int.-ság kritériumai és elegendő feltételei téglalapon

1.–4. Tétel. • $\sigma(f,P)$-vel; • $\sigma(f,P^k)$-val; • $\mathcal{O}(f,P)$-vel; • $\mathcal{O}(f,P^k)$-val.

Riemann-kritérium: $f : Q \to \mathbb{R}$ korl. fv. $\Leftrightarrow$ R-itható Q-n, ha $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ P felosztás Q-nak, hogy $\mathcal{O}(f,P) = S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

5. Tétel. $f : Q \to \mathbb{R}$ folytonos fv. R-integrálható

6. Tétel. $f : Q_1 \to \mathbb{R}$ R-int.-ható, $Q_2 \subset Q_1$ is tégla, úgy $f|_{Q_2}$ R-itható Q_2-n.

7. Tétel (az int. additivitása téglalapra). Q_1, Q_2 közös belső pont nélküli téglalapok, hogy $Q = Q_1 \cup Q_2$ is téglalap.
Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ R-itható Q_1 és Q_2 $\Rightarrow$ Q-n is és $\int_Q f = \int_{Q_1} f + \int_{Q_2} f$.

(Ez mehet többre is!)

3) Műveleti tulajdonságok, egyenlőtlenségek, középértéktételek

1. Tétel. Ha $f, g: Q \to \mathbb{R}$ R-integrálhatók, $p, q \in \mathbb{R}$ adott, akkor $pf + qg$ is R-ható és $\boxed{\int_Q (pf+qg) = p\int_Q f + q\int_Q g}$.

Megj. Ez igaz véges összegre általában is, ill. f^2, $f \cdot g$, $|f|$ és $\frac{f}{g}$-re $(g \geq c > 0)$ is.

2. Tétel. Ha $f, g: Q \to \mathbb{R}$ R-integrálhatók Q-n, úgy

a) $f \leq g \Rightarrow \int_Q f \leq \int_Q g$

b) $\left|\int_Q f\right| \leq \int_Q |f|$

c) $m \leq f \leq M$, $0 \leq g \Rightarrow m\int_Q g \leq \int_Q f \cdot g \leq M \int_Q g$

d) Ha $f: Q \to \mathbb{R}$ R-ható $m \leq f \leq M \Rightarrow m \leq \frac{1}{m(Q)} \int_Q f$

e) Ha f folytonos $\Rightarrow \exists\, c \in Q$, hogy $\int_Q f = m(Q) f(c)$.

4) Az integrál kiszámítása (Fubini-tétel) téglalapon

1. Tétel. Ha $f: Q \to \mathbb{R}$ korl. fv. R-integrálható Q-n és

- $\forall\, x \in [a_1, b_1]$-re $\exists \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy$

vagy

- $\forall\, y \in [a_2, b_2]$-re $\exists \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx$, akkor

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy \right) dx \text{ vagy } \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

2. Tétel. Ha $f: Q \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor

$$\boxed{\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy \right) dx}$$

Pl. 1) $\iint_{[0,1]\times[0,1]} x\sqrt{y}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x\sqrt{y}\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\sqrt{y} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{y}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \underline{\frac{1}{3}}$

2) $\iint_{[0,1]\times[-1,0]} x\,e^{xy}\,dx\,dy =$

⑤

7) Impropius R-integrálok

Def. $a \in \mathbb{R}$ adott, $a < b \le +\infty$, $f: [a,b[\to \mathbb{R}$ $\forall [a,t] \subset [a,b[$-n korl. és R-fó és $b = +\infty$ vagy $\exists\, \varepsilon > 0$, hogy f nem korl $[b-\varepsilon, b[$. Ha $\boxed{\exists \lim\limits_{t \to b-0} \int_a^t f \doteq \int_a^b f}$ véges hé, akkor

ezt az f impropius R-int-jának nev. $[a,b)$-n. Azt mondjuk hogy az impropius int konvergens. (Ha a hé nem $\exists$, úgy az imp. int. divergens)

- A $-\infty \le c < a$, $f:]c,a] \to \mathbb{R}$-re is értelmezhetjük..., hogy
$$\boxed{\exists \lim_{t \to c+0} \int_t^a f \doteq \int_c^b f}$$
- $-\infty \le a < b \le +\infty$, $f:]a,b[\to \mathbb{R}$-re pedig az értelmezés.
$$\boxed{\exists \lim_{\substack{x \to a+0 \\ y \to b-0}} \int_x^y f \doteq \int_a^b f}$$

Pl. a) $\int_1^\infty x^\alpha \, dx = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha+1}, & \text{ha } \alpha < -1 \\ \text{div.}, & \text{egyébként} \end{cases}$ b) $\int_0^\infty e^{\alpha x} dx = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha}, & \alpha < 0 \\ +\infty, & \alpha \ge 0 \end{cases}$

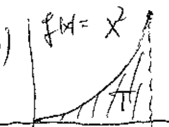
8) Alkalmazások

a) Terület definíciója: a görbe alatti ill. görbék közötti ter.

$T = \int_a^b f(x)\,dx$ $(f \ge 0)$

$T = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx$

$f_2 \ge f_1$

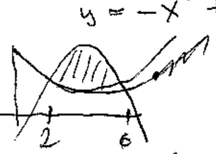


$T = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$T = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$

$xy = 1$
$x + y = \frac{5}{2}$
$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$
kot. ter

$y = -x^2 + 8x - 9$, $y = \frac{x^2}{2} - 4x + 9$ görbék által bezárt terület:



$T = \int_2^6 \left[(-x^2 + 8x - 9) - \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 9\right)\right] dx = 16$

b) Görbe ívhossza: (Anal II. 80 – 84.)

Görbe: $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n): [a,b] \to \mathbb{R}^n$
folyt. $\ell(\underline{f}, P) = \sum_{i=1}^{n} \|\underline{f}(t_i) - \underline{f}(t_{i-1})\|$

$\underline{f}$ sima g. $\Rightarrow$ $\boxed{\ell(\underline{f}) = \sup_P \{\ell(\underline{f}, P)\} = \int_a^b \|\underline{f}'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i'^2(t)}\,dt}$

Pl. $\underline{f} = (\cos, \sin): [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ egységkörre: $\ell(\underline{f}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = 2\pi$

$g: [a,b] \to \mathbb{R}$ folyt-an diff-ható ívhossza $\boxed{\int_a^b \sqrt{1 + g'^2(t)}\,dt}$

$g(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in [0,1]$.
$g' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow g'^2(x) = \frac{9}{4} x$

$x^2 + y^2 = 25$ $\boxed{1/4 \text{ kör ívhossza}}$

$\ell(g) = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}\, dx = \left[\frac{(1 + \frac{9}{4}x)^{3/2}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4}}\right]_0^1 = \frac{8}{27}\left[1 - \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right]$

c) Forgástest térfogata: $\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ $(x \in [-r, r])$; $f(x) = \sin x$ $(x \in [0, \pi])$; $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ $(x \in [1,4])$

5) A Riemann-integrál korlátos $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^n$)-beli halmazon

<u>Def.</u> Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$ (v $\mathbb{R}^n$) korlátos halmaz, $f: S \to \mathbb{R}$ korlátos fv., $f_S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$f_S(x) = \begin{cases} f(x), & x \in S \\ 0, & x \in CS \end{cases}$$

$$\boxed{f_S(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in S \\ 0, & (x,y) \in CS \end{cases}}$$

Legyen $Q \subset \mathbb{R}^2$ (v $\mathbb{R}^n$) olyan téglalap (tégla), hogy $S \subset Q$.

Az f fv.-t R-integrálhatónak mondjuk S felett, ha $\exists \int_Q f_S$ és az

$$\boxed{\int_S f \doteq \int_Q f_S}$$

számot az f S feletti Riemann-integráljának nev.

<u>Megj.</u> $\int_S f$ nem függ Q megválasztásától.

<u>Tétel</u> (az <u>int. tulajdonságai</u>). Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$ (v $\mathbb{R}^n$) korl. halmaz $f, g: S \to \mathbb{R}$ korlátos fv.-ek.

a) Ha f és g R-intók S-en, akkor $pf + qg$ $(p, q \in \mathbb{R})$ is és

$$\boxed{\int_S (pf + qg) = p\int_S f + q\int_S g}$$ (véges összegre is!)

b) Ha f, g R-intók S-en és $f \le g \Rightarrow \int_S f \le \int_S g$

c) Ha f R-intó $\Rightarrow |f|$ is és $\left|\int_S f\right| \le \int_S |f|$.

d) $T \subset S$, $f \ge 0$ S-en és R-intó T-n és S-en is $\Rightarrow \int_T f \le \int_S f$

e) Ha f R-intó S_1 és S_2 felett, akkor $S_1 \cup S_2$ és $S_1 \cap S_2$ felett is és

$$\boxed{\int_{S_1 \cup S_2} f = \int_{S_1} f + \int_{S_2} f - \int_{S_1 \cap S_2} f}$$

ha $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ v. ömsl. $\mathbb{R}^2$-ben, úgy $\int_{S_1 \cap S_2} f = 0$

5) Jordan-mérhető halmazok $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^n$)-ben

1. Def. Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$ ($\vee \mathbb{R}^n$) korlátos halmaz. Ha az $f(x,y)=1$ ($(x,y)\in\mathbb{R}^2$) ($\vee$ $f(x)=1$, $x\in\mathbb{R}^n$) konstans fv. R-integrálható S-en, akkor azt mondjuk, hogy S Jordan-mérhető $\mathbb{R}^2$-ben ($\vee \mathbb{R}^n$-ben) és az

$$\boxed{m_J(S) \doteq \int_S 1 \doteq \int_Q 1_S} \quad (*) \qquad (S \subset Q)$$

számot S Jordan-mértékének nevezzük.

Megj. 1) Ha $S = Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, akkor $m_J(Q) = \int_Q 1 = m(Q)$

2) Mit jelent szemléletesebben a J-mérhetőség és mérték?

- (*) miatt $m_J(S) = \int_Q 1_S$, ha S Jordan-mérhető, ami azzal ekvivalens, hogy

$$\boxed{\underline{\int}_Q 1_S = \overline{\int}_Q 1_S} \qquad \left(1_S(x) \doteq \begin{cases} 1, & x\in S \\ 0, & x\in CS \end{cases}\right)$$

és $m_J(S)$ ez a közös érték (az alsó és felső D-int. $=$)

- Tudjuk, hogy

$$\underline{\int}_Q 1_S \doteq \sup_P \{s(1_S,P)\} \quad \text{és} \quad \overline{\int}_Q 1_S \doteq \inf_P \{S(1_S,P)\}$$

- Másrészt, mivel 1_S vagy 1 vagy 0, így

$$s(1_S,P) = \sum\nolimits_* m(T_{ij}) = j(S,P) \quad \text{, hogy } T_{ij} \subset S$$
$$S(1_S,P) = \sum\nolimits^* m(T_{ij}) = J(S,P) \quad \text{, hogy } T_{ij} \cap (S \cup \partial S) \neq \emptyset$$

Itt $j(S,P)$ a belülről $J(S,P)$ a kívülről közelítő (egymáshoz csatlakozó, közös belső pont nélküli) téglalapok területeinek összege. $0 \le j(S,P) \le J(S,P) \le m(Q)$

- Így $\underline{\int}_Q 1_S = \dots = \sup\{j(S,P)\} = m_{*J}(S)$ | $\overline{\int}_Q 1_S = \dots = \inf\{J(S,P)\} = m_J^*(S)$

ahol $m_{*J}(S)$-t belső, $m_J^*(S)$-t külső Jordan mértéknek nev.

- $S \subset \mathbb{R}^2$ ($\vee \mathbb{R}^n$) $\Leftrightarrow$ J-mérhető, ha $m_{*J}(S) = m_J^*(S) = m_J(S)$.

Tétel. a) Ha S Jordan-mérhető, akkor $m_J(S) \geq 0$.

b) S_1, S_2 J-mérhető, $S_1 \subset S_2 \Rightarrow m_J(S_1) \leq m_J(S_2)$.

c) Ha S_1 és S_2 J mérhetők akkor $S_1 \cup S_2$ és $S_1 \cap S_2$ is az, és

$$m_J(S_1 \cup S_2) = m_J(S_1) + m_J(S_2) - m_J(S_1 \cap S_2).$$

Köv. Ha S_1 és S_2 J-mérhető, közös belső pont nélküli h-ok, akkor $m_J(S_1 \cap S_2) = 0 \Rightarrow \boxed{m_J(S_1 \cup S_2) = m_J(S_1) + m_J(S_2)}$

Ebből jön a J-mérték ~~tel~~ véges additivitása:

$$\boxed{m_J\left(\bigcup_{i=1}^{k} S_i\right) = \sum_{i=1}^{k} m_J(S_i)},$$

ha S_i-k páronként közös belső pont nélküli h-ok.

Megjegyzések: A J-mérték eltolás (transzláció) invariáns.

Így m_J nemnegatív, végesen additív, mozg. inv. mérték, hogy az egységkocka (~~téglalap~~ négyzet) térfogata (területe) 1.

A következő eredmény azt mutatja, hogy az egyváltozós fv. R-intjának geometriai (mértékelméleti) tartalma valóban a görbe alatti terület.

Tétel. Ha $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ nemnegatív, R-integrálható, akkor az $S = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ y \in [0, f(x)]\} \subset \mathbb{R}^2$ halmaz J-mérhető és $m_J(S) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Tétel (Fubini-tétel egyszerű tartományra). Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum, $\phi, \psi: [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos fv-ek, $S = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ (egyszerű tartomány), $f: S \to \mathbb{R}$ folytonos fv, akkor f R-integrálható S-en és

$$\boxed{\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right] dx}$$

Pl. 1) S az $y = x$, $y = x+a$, $y = 0$, $y = 3a$ egyenesekkel határolt.

$$\iint_S (x^2 + y^2)\,dx\,dy = ?$$

2) Az $xy = 1$ és $x + y = \frac{5}{2}$ görbékkel határolt síkidom területe.

III. Lebesgue-mérték

(IV. Mértékek konstruálása)

A differenciál és integrálszámítás tárgyban megadtuk a Jordan-mérték definícióját (konstrukcióját). Ez és a Jordan-mérték fontosabb tulajdonságai megtalálhatók az Analízis III. jegyzetben (65.–73. o.). Kiemelnénk, hogy a Jordan-mérték egy nemnegatív, monoton, végesen additív, mozgásinvariáns mérték, melynél az egységkocka mértéke egy.

A következőkben előbb a számegyenes megadjuk a Lebesgue-mérték definícióját (konstrukcióját), majd egy absztrakt mértékteret, illetve mértéket.

1. A számegyenes topológiája

A valós számok $\mathbb{R}$ halmaza (a számegyenes, mint modell) metrikus tér a $\rho(x,y)=|x-y|$ $(x,y\in\mathbb{R})$ metrikával. Az alapvető topológiai fogalmakat (belső pont, nyílt halmaz, zárt halmaz, torlódási pont, konvergencia, kompakt halmaz) és a hozzájuk kapcsolódó tételeket ismertnek tekintjük, használjuk. A korábban bevezetett jelöléseken túl a továbbiakban $\mathcal{N}$ a korlátos nyílt, $\mathcal{Z}$ a korlátos zárt, $\mathcal{K}$ a korlátos halmazok osztályát jelöli $\mathbb{R}$-ben.

Szükségünk lesz a következő (eddig nem vizsgált) fogalomra és eredményekre.

Definíció. Legyen $G \in \mathcal{N}$ nemüres halmaz. A $\delta = (a,b)$ $(a<b)$ nyílt intervallumot G komponensének nevezzük, ha $\delta \subset G$ és $a, b \notin G$.

1. Tétel. $\forall\, G \in \mathcal{N}$ nemüres halmaz előállítható legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok páronként diszjunkt komponensének egyesítéseként. (struktúra-tétel)

Biz. Daróczy: Mérték és Integrál (D) (4.-5. o.).

2. Tétel. Ha $F_1, F_2 \in \mathcal{Z}$ nemüres és diszjunkt halmazok, akkor $\exists$ $G_1, G_2 \in \mathcal{N}$, hogy $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$ és $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. (Elválasztási tétel)

Biz. (D) (5.-6. o).

2. A Lebesgue-mérték a számegyenesen

a) Korlátos nyílt halmazok mértéke

Definíció. A $\delta = (a,b)$ nyílt intervallum mértékén az $m\delta \doteq b-a$ számot értjük. Ha $D \in \mathcal{N}$, úgy a struktúra tétel miatt

$$D = \dot{\bigcup_i} \delta_i \quad (\delta_i = (a_i, b_i)),\ \delta_j \cap \delta_k = \emptyset,\ \text{ha } j \neq k),$$

egy ilyen D halmaz mértékén az

$$mD = \sum_i m\delta_i$$

számot értjük (ha létezik). $m\emptyset \doteq 0$.

Megjegyzések: 1) $\forall D \in \mathcal{N}$-re $\exists\, mD$.
2) $\forall D \in \mathcal{N}$-re $mD \geq 0$.
3) $m: \mathcal{N} \to [0,\infty)$ halmazfüggvény.

(ld. (D), 7.–8.o.)

Tétel. Az $m: \mathcal{N} \to [0,\infty)$ mértékre teljesül, hogy:

– Monoton: $D_1 \subseteq D_2$ $(D_1, D_2 \in \mathcal{N}) \Rightarrow mD_1 \leq mD_2$;

– Teljesen additív: Ha $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ $(D, D_i \in \mathcal{N})$ és $D_j \cap D_k = \emptyset$, ha $j \neq k$ $\Rightarrow$ $mD = \sum_{i=1}^{\infty} mD_i$,

– Szubadditív: Ha $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ $(D, D_i \in \mathcal{N}) \Rightarrow$ $mD \leq \sum_{i=1}^{\infty} mD_i$.

Biz. (D) 9.–12.o.

Megjegyzések. 1) A teljesen additív és szubadditív tulajdonságok a $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ véges előállításokra is igazak.

2) Egy $D \in \mathcal{N}$ mértékére

$$mD = \inf\{mG \mid D \subseteq G,\ G \in \mathcal{N}\}.$$

(ld. (D) 12.o)

b) Korlátos zárt halmazok mértéke

Legyen $F \in \mathcal{Z}$ tetszőleges nemüres halmaz, $A = \inf F \in F$, $B = \sup F \in F$, $S = [A, B]$ (az F-et tartalmazó legszűkebb zárt intervallum). Ekkor $C_S F = S \setminus F$ korlátos nyílt halmaz, mert $C_S F = (A,B) \cap CF$.

Definíció. Az $F \in \mathcal{Z}$ halmaz mértékén az

$$mF = B - A - m[C_S F]$$

számot értjük.

Tétel. A korlátos zárt halmazok osztályán értelmezett mértékre teljesül, hogy

- $mF \geq 0$, $mF < +\infty$, így $m: \mathcal{Z} \to [0, \infty)$
- Monoton: $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow mF_1 \leq mF_2$ $(F_1, F_2 \in \mathcal{Z})$
- Végesen additív: $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ $(F_i \in \mathcal{Z},\ F_j \cap F_k = \emptyset,\ j \neq k)$
  $\Rightarrow$ $mF = \sum_{i=1}^{n} mF_i$.

Biz. (D) 13.–17. o.

Megjegyzések: 1) $mD = \sup\{mF \mid F \subseteq D, F \in \mathcal{Z}\}$, $D \in \mathcal{N}$;

2) $mF = \inf\{mD \mid F \subseteq D, D \in \mathcal{N}\}$, $F \in \mathcal{Z}$;

3) $mF = \sup\{mH \mid H \subseteq F, H \in \mathcal{Z}\}$, $F \in \mathcal{Z}$.

(ld. (D) 14.–17. o)

c) Korlátos halmazok külső és belső mértéke

Definíció. Az $E \in \mathcal{K}$ halmaz külső mértékén az

$$m^* E = \inf\{mD \mid E \subseteq D,\ D \in \mathcal{N}\},$$

belső mértékén pedig az

$$m_* E = \sup\{mF \mid F \subseteq E,\ F \in \mathcal{Z}\}$$

számot értjük. Az üres halmazra $m^*\emptyset = m_*\emptyset = 0$.

Tétel. A korlátos halmazok $\mathcal{K}$ osztályán értelmezett külső és belső mértéke teljesül, hogy:

– $0 \leq m^* E < +\infty$; $0 \leq m_* E < +\infty$, azaz $m^*, m_* : \mathcal{K} \to [0, \infty)$;

– Monoton: $E_1 \subseteq E_2$ $(E_1, E_2) \in \mathcal{K} \Rightarrow$

$$m^* E_1 \leq m^* E_2 \quad , \quad m_* E_1 \leq m_* E_2 \ ;$$

– m^* szubadditív: $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ $(E, E_i \in \mathcal{K}) \Rightarrow$

$$m^* E \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^* E_i \ ;$$

(véges előállításra is igaz);

– m_* erősen additív: $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ $(E, E_i \in \mathcal{K};\ E_i \cap E_k = \emptyset, i \neq k)$

$$\Rightarrow \quad m_* E \geq \sum_{i=1}^{\infty} m_* E_i$$

(véges előállításra is igaz);

– $m_* E \leq m^* E \quad \forall E \in \mathcal{K}$;

– Ha $E \subset \Delta \doteq (A, B)$ (nyílt intervallumban) $\Rightarrow$

$$m^* E + m_* [C_\Delta E] = m \Delta \ .$$

Biz. (D) 18. – 21. o.

d) (Lebesgue-) mérhető halmazok

Definíció. Az $E \in \mathcal{K}$ halmazt (Lebesgue-) mérhetőnek nevezzük, ha $m^* E = m_* E$. Az E mérhető halmaz (Lebesgue-) mértékén az

$$m E \doteq m^* E = m_* E$$

számot értjük.

Jelölje $\mathfrak{M}$ a számegyenes (Lebesgue-) mérhető halmazait. Nyilván: $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{K}$.

Tétel (a Lebesgue-mérték tulajdonságai).

$\begin{cases} m D = \inf\{m G \ldots\} \\ m D = \sup\{m F \ldots\} \end{cases}$ A korlátos nyílt és zárt halmazok mérhetőek és mértékük egyenlő a korábban definiált mértékkel.

$\begin{cases} m^* D = m D \\ m_* D = m D \end{cases}$ – $\forall$ mérhető halmaz mértéke nemnegatív.

– Teljesen additív: ha $\boxed{E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i}$ $(E_i \in \mathfrak{M})$ és $E_j \cap E_k = 0$ $j \neq k$-ra $\Rightarrow$ E mérhető, ha $E \in \mathcal{K}$ és $\boxed{m E = \sum_{i=1}^{\infty} m E_i}$

$\sum m E_i = \sum m_* E_i \le m_* E \le m^* E \le \sum m^* E_i = \sum m E_i$

– Ha $E_1, E_2 \in \mathfrak{M} \Rightarrow \boxed{E_1 \setminus E_2 \in \mathfrak{M}}$.

– Ha $E_i \in \mathfrak{M}$ $(i \in N)$ és $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{K}$, akkor $\boxed{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \cancel{\mathcal{K}}}$.

– Ha $E_i \in \mathfrak{M}$ $(i \in N) \Rightarrow \boxed{\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \cancel{\mathcal{K}}}$ $\quad \mathcal{K} = \mathfrak{M}$

– $\exists$ a számegyenesen korlátos nem mérhető halmaz.

Biz. (D) 22.–26. o.

3. Absztrakt mértékterek

Ha $X \subset \mathbb{R}$ mérhető halmaz és $\mathcal{S}$ jelöli a X összes mérhető részhalmazának osztályát, akkor az utolsó tétel szerint $\mathcal{S}$-re teljesül, hogy

– $X \in \mathcal{S}$;

– Ha $E \in \mathcal{S} \Rightarrow (X - E) \in \mathcal{S}$;

– Ha $E_i \in \mathcal{S}$ $(i = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{S}$.

Továbbá minden $E \in \mathcal{S}$ halmazra értelmezve van egy mE szám (az E Lebesgue-mértéke), hogy:

– $0 \le m E \le m X < \infty$ $\forall E \in \mathcal{S}$.

– Ha $E_i \in \mathcal{S}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ és $E_j \cap E_k = \phi$ $j \neq k$, akkor $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m E_i$. (teljesen add.)

– Ha $E \in \mathcal{S}$ és $m E = 0 \Rightarrow \forall E' \subset E$-re $E' \in \mathcal{S} \wedge m E' = 0$.

(a mérték teljes)

A következőkben ezeket az eredményeket definícióvá tesszük, s így vezetünk be absztrakt mértékteret és azon mértéket.

Definíció. Legyen $\bar{X}$ nemüres absztrakt halmaz. Legyen $\mathcal{B}$ az $\bar{X}$ részhalmazainak olyan osztálya, amelyre teljesülnek a következők:

- $\bar{X} \in \mathcal{B}$;
- Ha $E \in \mathcal{B}$, akkor $(\bar{X} \setminus E) \in \mathcal{B}$;
- Ha $E_i \in \mathcal{B}$ $(i=1,2,\dots)$, akkor $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{B}$.

Ekkor a $\mathcal{B}$ halmazosztályt Borel-féle halmaztestnek, az $(\bar{X}, \mathcal{B})$ párt mérhető térnek nevezzük. $\bar{X}$ elemeit a tér pontjainak, a $\mathcal{B}$-hez tartozó halmazokat pedig a tér mérhető halmazainak nevezzük.

Ha továbbá $\forall E \in \mathcal{B}$-hez hozzárendelünk egy mE-vel jelölt valós számot, hogy

- $0 \leq mE \leq m\bar{X} < \infty \quad \forall E \in \mathcal{B}$;
- Ha $E_i \in \mathcal{B}$ $(i=1,2,\dots)$ és $E_j \cap E_k = \emptyset$ $j \neq k$-ra, akkor
$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i;$$
- Ha $E \in \mathcal{B}$ és $mE = 0$, akkor $\forall E' \subset E$-re $E' \in \mathcal{B}$ és
$$mE' = 0,$$

akkor azt mondjuk, hogy $m : \mathcal{B} \to [0, m\bar{X}]$ egy véges (teljes) mérték az $(\bar{X}, \mathcal{B})$ mérhető téren.

Az $(\bar{X}, \mathcal{B}, m)$ hármast (véges) mértéktérnek nevezzük.

Ha $\bar{X}$ a számegyenes egy (Lebesgue-) mérhető halmaza, $\mathcal{L}$ az $\bar{X}$ (Lebesgue-) mérhető részhalmazainak osztálya és m a korábbi (Lebesgue-) mérték, akkor $(\bar{X}, \mathcal{L}, m)$ mértéktér. Így az alábbi általános eredmények igazak lesznek az $(\bar{X}, \mathcal{S}, m)$-re is.

Tétel. Ha $(\bar{X}, \beta, m)$ tetszőleges mértéktér, akkor teljesülnek a következők:

- Ha $E_i \in \beta$ $(i=1,2,\dots)$, akkor $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \beta$;
- Ha $E_1 \subset E_2$ $(E_1, E_2 \in \beta) \Rightarrow (E_2 \setminus E_1) \in \beta$ és
  $m(E_2 \setminus E_1) = m E_2 - m E_1$;
- Ha $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$ mérhető halmazok és $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, akkor
  $$m E = \lim_{n \to \infty} m E_n;$$
- Ha $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ mérhető halmazok és $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$, akkor
  $$m E = \lim_{n \to \infty} m E_n.$$

(Az utóbbi két tulajdonság a mérték folytonosságát jelenti.)

Biz. (D) 28. – 30. o.

IV. Mérhető függvények és függvénysorozatok

1. Mérhető függvények

Célunk lehet, hogy a I-ben tárgyalt mértékelmélet eszközeivel kezeljünk függvényeket. Ehhez szükséges, hogy a függvény képterének sok halmazára azon pontok halmaza, melyek képe ebben az adott halmazban van kezelhető legyen a mértékelmélet segítségével.

Nyilván választhatunk, hogy a képtér e sok halmazát hogyan válasszuk és az is, hogy e halmazok mérhetőségét „érdemes" megkövetelni, illetve az is, hogy az adott tulajdonsággal rendelkező függvényosztályt valahogy elnevezzük.

1. Definíció. Legyen $(\bar{X}, \mathcal{B}, m)$ tetszőleges mértéktér, $f: \bar{X} \to \mathbb{R}_b$ $(\mathbb{R}_b = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$ adott függvény. Az f függvényt mérhetőnek nevezzük, ha $\forall\ a \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\bar{X}(f > a) \doteq \{x \mid x \in \bar{X},\ f(x) > a\}$$

(úgynevezett) nívóhalmaz mérhető, ezaz $X(f>a) \in \mathcal{B}$.

Az f függvényt végesnek nevezzük, ha nem vesz fel $-\infty$ és $+\infty$ értéket.

2. Definíció. Ha egy adott (T) tulajdonság egy $E \subset \bar{X}$ halmaz kivételével teljesül, melyre $mE = 0$, akkor azt mondjuk, hogy a (T) tulajdonság majdnem mindenütt teljesül ($\bar{X}$-en). Például, ha f és g két valós függvény $\bar{X}$-en, hogy $m\,\bar{X}(f \neq g) = 0$, akkor f majdnem mindenütt egyenlő g-vel (és fordítva).

1. Tétel. Legyen f mérhető függvény $\bar{X}$-en. Ha g olyan függvény $\bar{X}$-en, mely majdnem mindenütt egyenlő f-el, akkor g is mérhető $\bar{X}$-en.

2. Tétel. Ha f mérhető $\bar{X}$-en, akkor $\forall\, a \in \mathbb{R}$-re az $\bar{X}(f \geq a)$, $\bar{X}(f = a)$, $\bar{X}(f \leq a)$, $\bar{X}(f < a)$ nívóh.-ok is mérhetők.

3. Tétel (műveleti tulajdonságok).

(–) Ha f mérhető $\bar{X}$-en és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor az $f + c$, cf, $|f|$, f^2, $\frac{1}{f}$ $(f \neq 0)$ f.v.-ek is mérhetőek.

(–) Ha f és g véges mérhető függvények $\bar{X}$-en, úgy $f - g$, $f + g$, $f \cdot g$ és $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ is mérhetőek.

Biz. (D) 31.–34.

2. Mérhető függvények sorozatai

A pontonkénti és egyenletes konvergencia fogalma ismert.

1. <u>Tétel</u>. Legyen $\langle f_n \rangle$ mérhető fv.-ek sorozata $\bar{X}$-en, hogy $\exists$ a $F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in \bar{X})$ véges vagy végtelen határérték, akkor F mérhető függvény $\bar{X}$-en.
Biz. (D) 34.-35. o.

1. <u>Definíció</u>. Legyen $\langle f_n \rangle$ m. fv-ek sorozata $\bar{X}$-en. Ha $\exists$ F, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x) \quad \text{majdnem mindenütt},$$

akkor azt mondjuk, hogy $\langle f_n \rangle$ <u>m.m. konvergál</u> F-hez.

2. <u>Tétel</u>. Ha a mérhető függvények $\langle f_n \rangle$ sorozata m.m. konvergál F-hez, akkor F mérhető.
<u>Biz</u>. (D) 35.-36. o.

2. <u>Definíció</u>. Legyen $\langle f_n \rangle$ m.m. véges mérhető függvényekből álló sorozat és f m.m. véges mérhető függvény $\bar{X}$-en. Ha $\forall\ \sigma > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} m\bar{X}(|f_n - f| \geq \sigma) = 0,$$

akkor azt mondjuk, hogy f_n <u>mértékben konvergál</u> f-hez, jelölésben: $f_n \Rightarrow f$.

A m.m. konvergencia és a mértékben való konvergencia kapcsolatát írja le a következő két tétel.

3. <u>Tétel (Lebesgue)</u>. Ha az $\langle f_n \rangle$ m.m. véges függvényekből álló sorozat m.m. egy m.m. véges f függvényhez konvergál, akkor $f_n \Rightarrow f$ is igaz.

4. <u>Tétel (Riesz-féle kiválasztási tétel)</u>. Ha $f_n \Rightarrow f$, akkor $\exists$ $\langle f_{n_k} \rangle$ részsorozat, hogy $f_{n_k} \to f$ m.m.

<u>Biz</u>. (D) 36.-38. o.

5. Tétel (Jegorov). Legyen $\langle f_n \rangle$ m.m. véges mérhető függvényekből álló sorozat, melyre $f_n \to f$ m.m., ahol f mérhető és m.m. véges fv. Akkor $\forall\ \delta > 0$ esetén $\exists\ E \subset \bar{X}$ mérhető halmaz, hogy $m\bar{X} - mE < \delta$ és a konvergencia E-n egyenletes.

Biz. (D) 39.–40. o.

3. Zárt intervallumon mérhető függvények szerkezete

Legyen $\bar{X} = [a,b]$, $\mathcal{B}$ az $[a,b]$ int. Lebesgue-mérhető részhalmazainak Borel-féle halmazteste, m pedig a Lebesgue-mérték $\mathcal{B}$-n. $(\bar{X}, \mathcal{B}, m)$ nyilván mértéktér.

A folytonos és mérhető függvények kapcsolatát vizsgáljuk.

1. Tétel. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor mérhető $[a,b]$-n.

Biz. (D) 66. o.

A tétel megfordítása nyilván(?) nem igaz.

2. Tétel (Borel). Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mérhető és korlátos fv., azaz $|f| \le K$, akkor $\forall\ \sigma > 0$ és $\varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos fv., melyre

$$m\bar{X}\,(|f - \varphi| \ge \sigma) < \varepsilon \quad , \quad |\varphi| \le K$$

teljesül.

Biz. (D) 68.–69. o.

3. Tétel (Fréchet). Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos $(|f| \le K)$ és mérhető függvény, akkor $\exists\ \langle \varphi_n \rangle$ ($\varphi_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos), hogy $|\varphi_k| \le K$ $(k = 1, 2, \dots)$ és $\varphi_n \to f$ m.m.

Biz. (D) 69. o.

4. Tétel (Luzin). Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korl. és mérhető fv. $(|f| \le K)$, akkor $\forall\ \delta > 0$-hoz $\exists\ \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos fv., hogy $m\bar{X}\,(f \ne \varphi) < \delta$, $|\varphi| \le K$.

VI. Lebesgue - integrál

1. Korlátos mérhető függvények Lebesgue-integrálja

Legyen $(\bar{X}, \mathcal{B}, m)$ tetszőleges mértéktér, $f: \bar{X} \to \mathbb{R}$ korlátos mérhető függvény, $A, B \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $A < f(x) < B$ $(x \in \bar{X})$, $P = \{ y_i \mid A = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = B \}$ $[A, B]$ egy felosztása és

$$e_k = \bar{X}(y_k \leq f < y_{k+1}) \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

mérhető halmazok (f mérhetősége miatt), melyek páronként diszjunktak és $\bigcup_{k=0}^{n-1} e_k = E$ teljesül, így $m\bar{X} = \sum_{k=0}^{n-1} m e_k$ (az m mérték definíciója miatt).

1. <u>Definíció</u>. Az $f: \bar{X} \to \mathbb{R}$ korlátos mérhető függvény P felosztáshoz tartozó alsó Lebesgue-összegén a

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \, m e_k ,$$

felső Lebesgue-összegén a

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \, m e_k$$

számokat értjük.

1. <u>Tétel</u> (<u>a Lebesgue-összegek tulajdonságai</u>).

ⓐ Ha $\lambda = \max_k (y_{k+1} - y_k)$, úgy $0 \leq S - s \leq \lambda \, m\bar{X}$.

ⓑ $\exists \sup_P \{s\} = \alpha$, $\inf_P \{S\} = \beta$ és $\alpha = \beta$, továbbá $\alpha = \beta$ független A és B választásától.

<u>Biz.</u> (D) 42.–44. o.

2. <u>Definíció</u>. Az $f: \bar{X} \to \mathbb{R}$ mérhető korlátos függvény Lebesgue-integrálján az $\alpha = \beta$ számot értjük, jelölésben:

$$\alpha = \beta = \int_{\bar{X}} f(x) \, dm(x)$$

3. <u>Definíció</u>. Legyen $f : \bar{X} \to \mathbb{R}$ korlátos mérhető függvény, $E \subset \bar{X}$ mérhető halmaz, $\mathcal{B}_E = \{E \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$, $(E, \mathcal{B}_E, m)$ mértéktér, akkor az E felett is korlátos mérhető f függvényre $\exists$ $\int_E f(x)\,dm(x)$ $(E \subset \bar{X})$, melyet az f E-feletti Lebesgue-integráljának nevezzük.

<u>Megjegyzés</u>. Ha $\bar{X} = [a,b] \subset \mathbb{R}$ és m a Lebesgue-mérték, akkor az $\int_a^b f(x)\,dm(x)$ vagy $\int_a^b f\,dm$ jelölést használjuk.

2. <u>Tétel</u> (<u>korl. m. fv. L-int-jának tulajdonságai</u>).

a) Ha $a \le f(x) \le b$ $(x \in \bar{X})$, akkor $a\,m\bar{X} \le \int_{\bar{X}} f(x)\,dm(x) \le b\,m\bar{X}$ (középérték-tétel).

b) Ha $f(x) = c \Rightarrow \int_{\bar{X}} f\,dm = c\,m\bar{X}$, ha $f \ge 0 \Rightarrow \int_X f\,dm \ge 0$, ha $E \subset \mathcal{B}$ és $mE = 0 \Rightarrow \int_E f\,dm = 0$.

$\bar{X} = E_1 \cup E_2 \Rightarrow \mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$
ind. végig ezetve
$\bar{X} = \bigcup^{\infty} E_i \Rightarrow m\bar{X} = \sum m E_i$
$\sum_{i=n+1}^{\infty} m E_i \Rightarrow 0$
$R_n = \bigcup_{n+1}^{\infty} E_i \Rightarrow \int_X = \sum^n \int_{E_i} + \int_{R_n}$
$A\,m R_n \le \int_{R_n} f \le B\,m R_n$

c) Ha E_i $(i \in \mathbb{N})$ páronként diszjunkt mérhető halmazok, hogy $\bar{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, akkor
$$\int_{\bar{X}} f(x)\,dm(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f(x)\,dm(x).$$
(teljes additivitás tétele).

d) Ha $f = g$ m.m., akkor $\int_{\bar{X}} f\,dm = \int_{\bar{X}} g\,dm$.

e) Ha $f \ge 0$ és $\int_{\bar{X}} f\,dm = 0 \Rightarrow f = 0$ m.m.

f) Legyen $f, g : \bar{X} \to \mathbb{R}$ korl. m. fv., akkor
$$\int_X [f(x) + g(x)]\,dm(x) = \int_X f(x)\,dm(x) + \int_X g(x)\,dm(x)$$
(additivitás).

g) Ha $f : \bar{X} \to \mathbb{R}$ k. m. fv. és $c \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{\bar{X}} c f(x)\,dm(x) = c \int_X f(x)\,dm(x)$.

h) Ha $f, g : \bar{X} \to \mathbb{R}$ k. m. fv és $f(x) \le g(x)$ $(x \in \bar{X})$, akkor
$$\int_{\bar{X}} f(x)\,dm(x) \le \int_{\bar{X}} g(x)\,dm(x).$$

i) Ha $f : \bar{X} \to \mathbb{R}$ k. m. fv. $\Rightarrow \left| \int_{\bar{X}} f(x)\,dm(x) \right| \le \int_{\bar{X}} |f(x)|\,dm(x)$.

j) Legyen $\langle f_n \rangle$ m. k. fv-ek sorozata $\bar{X}$-en, hogy $\exists\, K \in \mathbb{R}$ $|f_n(x)| < K$ $(n \in \mathbb{N})$ és mértékben konvergál az f korlátos mérhető függvényhez, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\bar{X}} f_n(x)\, dm(x) = \int_{\bar{X}} f(x)\, dm(x)$$

(kis Lebesgue-tétel).

Biz: (D) 45. - 52. o.

2. Nemnegatív mérhető függvények Lebesgue-integrálja

Legyen a továbbiakban is $(\bar{X}, \mathcal{B}, m)$ teljes mértéktér, $f: \bar{X} \to \mathbb{R}$ pedig nemnegatív mérhető fv. $\bar{X}$-en.

1. Definíció. Ha N természetes szám, akkor az $f \geq 0$ m. fv. N-edik szeletfüggvényén az

$$[f(x)]_N \doteq \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) \leq N \\ N, & \text{ha } f(x) > N \end{cases}$$

fv.-t értjük.

$[f]_N$ korlátos és mérhető, így $\exists$ Lebesgue-int-ja.

$0 \leq [f]_1 \leq [f]_2 \leq \dots \Rightarrow 0 \leq \int_{\bar{X}} [f]_1\, dm \leq \int_{\bar{X}} [f]_2\, dm \leq \dots$,

így $\exists \lim\limits_{N\to\infty} \int_{\bar{X}} [f]_N\, dm$ véges v. végtelen határérték.

2. Definíció. Az f nemnegatív mérhető függvényt Lebesgue-integrálhatónak nevezzük, ha a $\lim\limits_{N\to\infty} \int_{\bar{X}} [f]_N\, dm$ határérték véges és ezt az értéket f Lebesgue-integráljának nevezzük, jelölésben:

$$\int_{\bar{X}} f(x)\, dm(x) \doteq \lim_{N\to\infty} \int_{\bar{X}} [f(x)]_N\, dm(x) < +\infty.$$

Ha $E \subset \bar{X}$ m. halmaz és f m. nemnegatív fv. E-n, úgy hasonlóan definiálható f L-integrálhatósága és

$\int_E f(x)\,dm(x)$ -el jelölt Lebesgue-integrálja.
Ha a határérték végtelen, akkor $\int_X f\,dm = +\infty$, de akkor f nem integrálható.

<u>Megjegyzés</u>. Egy nemnegatív korlátos mérhető függvény L-integrálható és L-integrálja a korábban definiált L-integrál.

<u>Tétel</u> (<u>az int. tul.-i</u>). $f \geq 0$ m. fv. X-en, úgy:

a) Ha f L-integrálható, úgy f m.m. véges

b) Ha $g(x) = f(x)$ m.m. $(g \geq 0)$, akkor $\int_X g\,dm = \int_X f\,dm$.

c) Ha g m. és $g \geq f$, akkor $\int_X f\,dm \leq \int_X g\,dm$.

d) Ha $\int_X f\,dm = 0$, akkor $f = 0$ m.m.

$[f]_N + [\varphi]_N \leq f + \varphi$

$[f+g]_N \leq [f]_N + [\varphi]_N$

e) Ha $f, g \geq 0$ m. $\Rightarrow \int_X [f+g]\,dm = \int_X f\,dm + \int_X g\,dm$ (additivitás).

f) Ha $f \geq 0$ m., $c \geq 0$ konstans, úgy $\int_X cf\,dm = c\int_X f\,dm$ (homogén).

g) Legyen $\langle f_n \rangle$ nemnegatív m. fv.-ek sorozata X-en, mely m.m. konvergál az $f \geq 0$ fv.-hez, akkor
$$\int_X f\,dm \leq \sup_n \left\{ \int_X f_n\,dm \right\}$$
(Fatou-lemma).

$\sup \int_X f_n = \lim \int_X f_n + \text{Fatou}$
$\Rightarrow \int f \leq \lim$

$f_n \leq f \Rightarrow \int f_n \leq \int f \Rightarrow$

h) Legyen $\langle f_n \rangle$ nemnegatív m. fv.-ek sorozata, hogy $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ és $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, akkor
$$\int_X f\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,dm \quad \text{(Beppo Levi-tétel).}$$

1. $\int_X f_n\,dm \leq K$
$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ m.m.
$\exists \int_X f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$

i) Legyen $f \geq 0$ m. X-en. Ha $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, ahol E_i-k m. páronként diszjunkt halmazok, akkor $\int_X f\,dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\,dm$
(teljes additivitás)

3. Lebesgue-integrálható függvények

Legyen $(\bar{X}, \mathcal{B}, m)$ tetszőleges mértéktér és f (tetszőleges) mérhető függvény $\bar{X}$-en ($f: \bar{X} \to \mathbb{R}_b$).

Az

$$f_+(x) \doteq \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{ha } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad f_-(x) \doteq \begin{cases} 0, & \text{ha } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{ha } f(x) < 0 \end{cases}$$

szerint definiált $f_+, f_- : \bar{X} \to \mathbb{R}_b$ függvényeket f pozitív ill. negatív részének nevezzük.

f_+ és f_- nemnegatív m. fv-ek és $f = f_+ - f_-$.

<u>Definíció</u>. Az $f: \bar{X} \to \mathbb{R}_b$ m. fv-t Lebesgue-integrálhatónak nevezzük $\bar{X}$-en, ha az f_+ és f_- nemnegatív m. fv-ek L-integrálhatók. Az f L-int. függvény Lebesgue-integrálján a

$$\int_{\bar{X}} f \, dm \doteq \int_{\bar{X}} f_+ \, dm - \int_{\bar{X}} f_- \, dm$$

számot értjük.

A $\bar{X}$ halmazon L-integrálható függvények összességét $L_m(\bar{X})$ vagy $L(\bar{X})$ vagy egyszerűen csak L jelöli a továbbiakban.

Ha f korl. m., vagy nemnegatív m. és L-integrálható, úgy $f \in L$, továbbá L-integrálja megegyezik a korábban definiált L-integrállal.

Ha $\bar{X} = [a,b]$, úgy az $\int_a^b f(x) \, dm(x)$ v. $\int_a^b f \, dm$ jelölést használjuk.

Tétel (a L-int. tul.-i).

$|f| = f_+ + f_-$
$|a-b| \le |a|+|b|$

a) A $f: \bar{X} \to \bar{\mathbb{R}}_b$ m. fv. $\Leftrightarrow$ L-integrálható, ha $|f| \in L$ a
$$\left|\int_{\bar{X}} f\,dm\right| \le \int_X |f|\,dm .$$

a) =>

b) Ha $f \in L \Rightarrow f$ m.m. véges.

c) Ha $E \subset \bar{X}$ m. halmaz és $f \in L(X) \Rightarrow f \in L(E)$.

d) Ha $mE = 0 \Rightarrow \exists \int_E f\,dm = 0 \quad \forall f$-re.

e) Ha f, g m. $\bar{X}$-en és $|f| \le g$, $g \in L(X) \Rightarrow f \in L(\bar{X})$ (majoráns kritérium).

f) Ha $f \in L(\bar{X})$ és $g = f$ m.m. $\Rightarrow g \in L(\bar{X})$ és $\int_{\bar{X}} f\,dm = \int_{\bar{X}} g\,dm$.

g) Ha $f \in L(\bar{X})$ és $\bar{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ (ahol E_i-k páronként diszjunkt és mérhető halmazok), akkor
$$\int_{\bar{X}} f\,dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\,dm$$
(az integrál teljesen additív).

h) Ha $f \in L$ és $c \in \bar{\mathbb{R}} \Rightarrow cf \in L$ és $\int_{\bar{X}} cf\,dm = c\int_{\bar{X}} f\,dm$ (homogén).

i) Ha $f, g \in L \Rightarrow f+g \in L$ és $\int_{\bar{X}} (f+g)\,dm = \int_{\bar{X}} f\,dm + \int_{\bar{X}} g\,dm$ (additív).

j) Ha $f \in L(\bar{X})$, akkor $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, hogy $\forall E \subset \bar{X}$ m. halmazra, amelyre $mE < \delta$
$$\left|\int_E f\,dm\right| < \varepsilon$$
(abszolút folytonos).

k) Legyen $\langle f_n \rangle$ m. fv.-ek sorozata $\bar{X}$-en, mely mértékben konvergál az f fv.-hez. Ha $\exists F \in L(X)$, hogy
$$|f_n(x)| \le F(x) \quad \forall n \in N \text{ és } x \in \bar{X}\text{-re, akkor}$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,dm = \int_{\bar{X}} f\,dm$$
(nagy Lebesgue-tétel).

(l) Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-integrálható, akkor $f\in L([a,b])$ és a két integrál megegyezik.

<u>Biz.</u> Ha $P=\{x_i \mid a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ $[a,b]$ egy felosztása, $m_i, M_i, s(f,P), S(f,P)$ a szokásosak és $\varphi,\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ olyanok, hogy

! $\varphi(x)=\begin{cases} m_i, & x\in(x_{i-1},x_i)\\ \text{tetsz.} & \text{egyébként}\end{cases}$, $\psi(x)=\begin{cases} M_i, & x\in(x_{i-1},x_i)\\ \text{tetsz.} & \text{egyébként}\end{cases}$,

akkor φ,ψ mérhetőek $[a,b]$-n, $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$ m.m. és

! $$\int_{[a,b]}\varphi(x)\,dm(x)=s(f,P),\quad \int_{[a,b]}\psi(x)\,dm(x)=S(f,P).$$

Legyen $\langle P_n\rangle$ olyan normális f. sorozata $[a,b]$-nek, hogy $P_n\subset P_{n+1}$ $(n\in\mathbb{N})$, $\varphi_n,\psi_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ $(n\in\mathbb{N})$ olyanok, hogy

! $\varphi_n(x)=\begin{cases} m_i^n, & x\in(x_{i-1}^n,x_i^n)\\ \text{tetsz.} & \text{egy.}\end{cases}$, $\psi_n(x)=\begin{cases} M_i^n, & x\in(x_{i-1}^n,x_i^n)\\ \text{tetsz.} & \text{egy.}\end{cases}$

φ_n,ψ_n mérhetők; $\varphi_{n+1}(x)\ge\varphi_n(x)$, $\psi_{n+1}(x)\le\psi_n(x)$ m.m. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\langle\varphi_n\rangle$ felülről, $\langle\psi_n\rangle$ alulról korlátos és

! $$\varphi_n(x)\le f(x)\le\psi_n(x)\quad \text{m.m. } \forall n\in\mathbb{N}.$$

Így az $\underline{f}(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)$, $\bar f(x)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)$ szerint értelmezett $\underline{f}$ és $\bar f$ határfüggvények m.m. léteznek $[a,b]$-n, mérhetőek és korlátosak, továbbá $\underline{f}(x)\le f(x)\le\bar f(x)$ m.m. $[a,b]$-n.

A kis Lebesgue-tétel és f R-integrálhatósága miatt

$$\int_{[a,b]}[\bar f-\underline{f}]\,dm=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}(\psi_n-\varphi_n)\,dm=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}\psi_n\,dm-\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}\varphi_n\,dm=$$
$$=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}s_n=0$$

következik, ami $\bar f(x)-\underline{f}(x)\ge0$ (m.m) miatt adja, hogy $\bar f(x)=\underline{f}(x)$ m.m, így $f(x)=\bar f(x)=\underline{f}(x)$ m.m, f mérhető $[a,b]$-n.

f tehát korlátos mérhető függvény $[a,b]$-n, ami adja hogy $f\in L[a,b]$, továbbá

$$\int_{[a,b]}f\,dm=\int_{[a,b]}\underline{f}\,dm=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}\varphi_n\,dm=\lim_{n\to\infty}s_n=\int_a^b f(x)\,dx$$

is teljesül. Ezzel az állítást igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy a Dirichlet-függvény egy $[a,b]$ intervallumon (mivel m.m. 0) mérhető és korlátos, így L-integrálható, ugyanakkor nem R-integrálható. A L-int. általánosítása a R-integrálnak.

m) Ha $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható és $F' = f$ korlátos, akkor $f \in \mathcal{L}([a,b])$ és

$$F(t) - F(a) = \int_a^t f(x)\,dm(x), \quad \forall t \in [a,b].$$

(A Newton–Leibniz formula)

<u>Biz.</u> (D) 61.–65. o, ill. 77.–80. o.

4. A L-integrálható függvények tere ($\mathcal{L}^1$-tér)

Legyen adott az $(\bar{X}, \mathcal{B}, m)$ absztrakt mértéktér. Tekintsük az $\bar{X}$-en értelmezett L-integrálható függvények halmazát. A 3. fejezet tételének h) és i) állítása miatt integrálható függvények lineáris kombinációi is integrálhatók, ezért az integrálható függvények halmaza a szokásos összeadással és skalárral való szorzással lineáris (vektor) teret alkot. Jelöljük ezt az $\mathcal{L}^1(\bar{X})$ vagy egyszerűen $\mathcal{L}^1$ szimbólummal (vagy csak $\mathcal{L}$-el is lehet, ahogy korábban).

Vezessünk be az $\mathcal{L}^1$-térben egy normát

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1} \doteq \int_{\bar{X}} |f|\,dm$$

szerint. Nyilván igaz, hogy

$$\|\lambda f\|_{L^1} = |\lambda| \, \|f\|_{L^1},$$

$$\|f_1+f_2\|_{L^1} \le \|f_1\|_{L^1} + \|f_2\|_{L^1}.$$

Hogy az is teljesüljön: $\|f\|>0$, ha $f\neq 0$, fel kell tennünk, hogy az X téren ekvivalens függvények között (amelyek tehát m.m. egyenlőek) nem teszünk különbséget, ezek L^1-nek ugyanazt az elemét határozzák meg. Speciálisan, az L^1 tér nulleleme azon függvények halmaza, amelyek m.m. egyenlőek nullával. Így olyan függvényt ad $\|f\|_{L_1}$, mely teljesíti a norma összes tulajdonságát. Ezzel a következő definícióhoz jutottunk.

!

1. Definíció. Az L^1 normált tér elemei az egymással ekvivalens integrálható függvények osztályai, melyben az összeadást és a számmal való szorzást a függvények szokásos összeadása és számmal való szorzása segítségével definiáljuk, a normát pedig a

$$\|f\|_{L^1} \doteq \int_X |f| \, dm$$

szerint adjuk meg.

Az L^1 normált térben $d(f,g) \doteq \|f-g\|_{L^1}$ metrikát definiál.

(Két osztály összeadása azt jelenti, hogy mindkettőből kiválasztunk egy reprezentánst és vesszük az összegük osztályát. Az eredmény nem függ a reprezentánsok választásától.)

2. Definíció. Az integrálható függvények egy $\langle f_n \rangle$ sorozatának a fentebb definiált metrikában való konvergenciáját integrálban való konvergenciának nevezzük. átlagban

Tehát $\langle f_n \rangle$ integrálban konvergál az $f \in L^1$-hez, ha $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n(\varepsilon) > 0$, $\forall n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \int_{\bar{X}} |f_n - f| \, dm < \varepsilon$.

Tétel. L^1 teljes metrikus tér.

Biz. Legyen $\langle f_n \rangle$ L^1 tetsz. Cauchy-sorozata, azaz:

(*) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n(\varepsilon)$, $\forall n, m \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f_m\|_{L^1} = \int_{\bar{X}} |f_n - f_m| \, dm < \varepsilon$.

Válasszunk indexek egy $\langle n_k \rangle$ sorozatát, hogy

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_{L^1} = \int_{\bar{X}} |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| \, dm < \frac{1}{2^k}.$$

Ekkor a Beppo Levi-tétel miatt az $\bar{X}$-en a

$|f_{n_1}| + |f_{n_2} - f_{n_1}| + \cdots$ és így az $f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + \cdots$

sor is m.m. konvergens, továbbá legyen $f(x) = \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x)$. $\langle f_{n_k} \rangle$ tehát $\langle f_n \rangle$ egy majdnem mindenütt konvergens részsorozata.

Megmutatjuk, hogy $\langle f_{n_k} \rangle$ integrálban is konvergál f-hez. (*) miatt $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n(\varepsilon)$ $\forall k, l \geq n(\varepsilon) \Rightarrow$

$$\int_X |f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| \, dm(x) < \varepsilon.$$

A Fatou-lemma miatt itt elvégezhető az integráljel alatt az $l \to \infty$ határátmenet és akkor kapjuk, hogy

$$\int_X |f_{n_k}(x) - f(x)| \, dm(x) \leq \varepsilon,$$

ami adja, hogy $f \in L^1$ és $f_{n_k} \to f$ L^1-ben. De akkor $\langle f_n \rangle$ maga is konvergál f-hez L^1-ben.

Bizonyítás. Legyen $\langle f_n \rangle$ $\mathbb{L}^1$ tetszőleges Cauchy-sorozata, azaz: bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $n(\varepsilon) > 0$, hogy minden $n, m > n(\varepsilon)$ esetén

$$\| f_n - f_m \|_{L^1} = \int_X |f_n - f_m| d\mu < \varepsilon. \qquad (3..1)$$

Válasszuk indexek egy $\langle n_k \rangle$ sorozatát, hogy

$$\| f_{n_k} - f_{n_{k+1}} \|_{L^1} = \int_X |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| d\mu < \frac{1}{2^k}.$$

Ekkor Beppo Levi-tétel miatt X-en az

$$|f_{n_1}| + |f_{n_2} - f_{n_1}| + \ldots \quad \text{s így az} \quad f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + \ldots$$

sor is m.m. konvergens, továbbá legyen $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$. $\langle f_{n_k} \rangle$ tehát $\langle f_n \rangle$ egy majdnem mindenütt konvergens részsorozata.

Megmutatjuk, hogy $\langle f_{n_k} \rangle$ integrálban is konvergál f-hez. (3..1) miatt bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $n(\varepsilon) > 0$, hogy minden $k, l > n(\varepsilon)$esetén

$$\int_X |f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| d\mu(x) < \varepsilon.$$

A Fatou-lemma miatt itt elvégezhető az integráljel alatt az $l \to \infty$ határátmenet és ekkor kapjuk, hogy

$$\int_X |f_{n_k}(x) - f(x)| d\mu(x) \leq \varepsilon,$$

ami adja, hogy $f \in \mathbb{L}^1$ és $f_{n_k} \to f$ $\mathbb{L}^1$-ben. De akkor $\langle f_n \rangle$ maga is konvergál f-hez $\mathbb{L}^1$-ben.

□

3.5. A négyzetesen integrálható függvények tere (az $\mathbb{L}^2$-tér)

Az előbb beláttuk, hogy $\mathbb{L}^1$ teljes normált (metrikus) tér (így Banach-tér), de $\mathbb{L}^1$ nem euklideszi tér, mert a fenti norma nem származtatható skaláris szorzatból.

Most egy nem csak normált, hanem euklideszi teret fogunk definiálni. Ez lesz a négyzetesen integrálható függvények tere.

Az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ absztrakt mértéktérből indulunk ki, melyen adottak az $f : X \to \mathbb{R}_b$ mérhető függvények (m.m értelmezve X-en). Az egymással ekvivalens függvényeket azonosnak tekintjük.

3.5.1. Definíció. Egy $f : X \to \mathbb{R}_b$ mérhető függvényt *négyzetesen integrélhatónak* nevezzük, ha az $\int_X f^2 d\mu$ integrál létezik és véges. Az ilyen függvények halmazát az $\mathbb{L}^2(X)$ vagy $\mathbb{L}^2$ szimbólummal jelöljük.

3.5.2. Tétel. *Két négyzetesen integrálható függvény szorzata integrálható.*

Bizonyítás. Ez következik az $|f(x)g(x) \leq \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}|$ egyenlőtlenségből és az L-integrál tulajdonságaiból. □

3.5.3. Megjegyzés. Egy véges mértékű téren négyzetesen integrálható függvény integrálható.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 3.5.2. Tételt a $g \equiv 1$ függvényre, ami négyezetesen integrálható, ha a tér véges mértékű. □

3.5.4. Tétel. *Két $\mathbb{L}^2$-beli függvény összege is az $\mathbb{L}^2$ térbe tartozik.*

Bizonyítás. Ez nyilvánvaló az $(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$ egyenlőség, az 3.5.2. Tétel és a L-integrál tulajdonságai alapján. □

3.5.5. Tétel. *Ha $f \in \mathbb{L}^2$, $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $cf \in \mathbb{L}^2$.*

Bizonyítás. $\int_X (cf)^2 d\mu = \int_X c^2 f^2 d\mu = c^2 \int_X f^2 d\mu < \infty$ adja az állítást. □

3.5.6. Megjegyzés. $\mathbb{L}^2$ vektortér a függvények szokásos összeadására és a skalárral való szorzás műveletére nézve.

Bizonyítás. A 3.5.4. és a 3.5.5. Tételek segítségével könnyen ellenőrizhetjük a vektortér axiómáinak teljesülését. □

3.5.7. Definíció. Az f és g $\mathbb{L}^2$-beli függvények skaláris szorzatán az

$$\langle f, g \rangle := \int_X f(x)g(x)d\mu(x)$$

számot értjük. Ellenőrizhetjük, hogy a skaláris szorzat definíciójában szereplő négy tulajdonság valóban teljesül. (Az $\langle f, f \rangle > 0$, ha $f \neq 0$ teljesüléséhez felhasználjuk, hogy nem teszünk különbséget egymással ekvivalens függvények között, így a tér nulleleme most is a majdnem mindenütt nullát felvevő függvények osztálya .)

3.5.8. Definíció. Az $\mathbb{L}^2$ euklideszi tér a négyzetesen integrálható, egymással ekvivalens függvényosztályoknak az a vektortere, amelyekben az $\langle f, g \rangle = \int_X f(x)g(x)d\mu(x)$ szerint definiáljuk a skaláris szorzatot.

3.5.9. Megjegyzés. Az $\mathbb{L}^2$ euklideszi térben (mint mindegyikben) igaz a Cauchy-Bunyakovszkij- és a Minkowski (háromszög) egyenlőtlenség. Ezek alakja most

$$\left(\int_X fg d\mu\right)^2 \leq \left(\int_X f^2 d\mu\right)\left(\int_X g^2 d\mu\right), \tag{C-B}$$

$$\sqrt{\int_X (f+g)^2 d\mu} \leq \sqrt{\int_X f^2 d\mu} + \sqrt{\int_X g^2 d\mu}. \tag{M}$$

3.5.10. Definíció. Az $f \in \mathbb{L}^2$ *normája*

$$\| f \|_{L^2} := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_X f^2 d\mu}\,,$$

míg az $f, g \in \mathbb{L}^2$ elemek *távolsága:*

$$d(f,g) := \| f - g \|_{L^2} = \sqrt{\int_X (f-g)^2 d\mu}\,.$$

Nyilvánvaló, hogy az itt definiált normával és metrikával az $\mathbb{L}^2$ euklideszi tér normált, illetve metrikus tér (hiszen ez minden euklideszi térben igaz).

3.5.11. Definíció. Az $\langle f_n \rangle$ $\mathbb{L}^2$ metrikus térbeli *sorozat konvergens* $\mathbb{L}^2$*-ben*, ha létezik $f \in \mathbb{L}^2$, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy tetszőleges $n \geq n(\varepsilon)$ esetén

$$\| f_n - f \|_{L^2} := \sqrt{\int_X (f_n - f)^2 d\mu} < \varepsilon.$$

Mivel az $\langle f_n \rangle$ $\mathbb{L}^2$-beli sorozat konvergenciája az f függvényhez azzal ekvivalens, hogy $\lim_{n\to\infty} \int_X (f_n - f)^2 d\mu = 0$, ezért az $\mathbb{L}^2$-beli konvergenciát *négyzetintegrálra* (vagy közép-ben) *való konvergenciának* is nevezzük.

3.5.12. Tétel. *Ha az $\langle f_n \rangle$ $\mathbb{L}^2$-beli sorozat négyzetintegrálra konvergál az $f \in \mathbb{L}^2$ elemhez, akkor $f_n \to f$ mértékben.*

Bizonyítás. Legyen $\sigma > 0$ tetszőleges, $A_n(\sigma) = X(|f_n - f| \geq \sigma)$, akkor $\int_X (f_n - f)^2 d\mu \geq \int_{A_n(\sigma)} (f_n - f)^2 \geq \sigma^2 m(A_n(\sigma)) \geq 0$ a feltétel miatt adja, hogy $m(A_n(\sigma)) \to 0$, ami adja az állítást. □

3.5.13. Megjegyzés. Ha $f_n \to f$ középben, akkor létezik olyan $\langle f_{n_k} \rangle$, hogy $f_{n_k} \to f$ m.m.

Bizonyítás. Az előző tétel és a Riesz-féle kiválasztási tétel adja az állítást. □

3.5.14. Megjegyzés. Legyen $\langle f_n \rangle$ olyan, hogy $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{ha } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$f_n \to 0$ pontonként, de $f_n \not\to 0$ négyzetintegrálra.

3.5.15. Definíció. Az $\langle f_n \rangle$ Cauchy-sorozat $\mathbb{L}^2$-ben, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ n(\varepsilon),\ \forall\, n, m \ge n(\varepsilon) \Rightarrow \| f_n - f_m \|_{L^2} < \varepsilon. \qquad (*)$$

3.5.16. Tétel. *Ha $m(X) < \infty$, akkor* $\mathbb{L}^2(X)$ teljes metrikus tér*(azaz Hilbert-tér).*

Bizonyítás. Legyen $\langle f_n \rangle$ Cauchy- sorozat $\mathbb{L}^2(X)$, ekkor (*) igaz. Mivel (M)-ből $g \equiv 1$ és $m(X) < \infty$ esetén

$$\left(\int_X f d\mu\right)^2 \le m(X) \int_X f^2 d\mu\ ,$$

így

$$\int_X |f_n(x) - f_m(x)| d\mu(x) \le \sqrt{m(X)} \sqrt{\int_X (f_n(x) - f_m(x))^2 d\mu(x)} \le \varepsilon \sqrt{m(X)}$$

teljesül, azaz $\langle f_n \rangle$ az $\mathbb{L}^1$ metrikára nézve is Cauchy-sorozat.

Megismételve az $\mathbb{L}^1$-tér teljességének bizonyításakor alkalmazott gondolatmenetet, válasszuk ki $\langle f_n \rangle$-ből egy olyan $\langle f_{n_k} \rangle$ részsorozatot, mely m.m. konvergál egy f függvényhez. Ha k és l elég nagy, akkor

$$\int_X (f_{n_k} - f_{n_l})^2 d\mu < \varepsilon$$

teljesül. Alkalmava a Fatou-lemmát az $l \to \infty$ határátmenettel, így

$$\int_X (f_{n_k} - f)^2 d\mu < \varepsilon$$

következik, ami adja, hogy $f \in \mathbb{L}^2$ és, hogy $f_{n_k} \to f$ négyzetintegrálra. Ha pedig egy Cauchy-sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor a sorozat is konvergens és ugyancsak f a határértéke. □

3.5.17. Megjegyzés. Eddig többször kihasználtuk, hogy $m(X) < \infty$. Ha $X = \mathbb{R}$ és a mérték a Lebesgue-mérték, úgy $m(X) = \infty$.

Ekkor pl. az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $(x \in \mathbb{R})$ nem integrálható $\mathbb{R}$-en, de négyzetesen integrálható. Az

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ha } |x| \le n \\ 0 & \text{ha } |x| > n \end{cases}$$

szerint definiált $\langle f_n \rangle$ sorozat $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$-ben konvergál 0-hoz, de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$-ben nem konvergens.

Ugyanakkor $\mathbb{L}^2(X)$ akkor is teljes, ha $m(X) = \infty$. (Ld. Kolmogorov-Fomin: A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei.)