

MATEMATIKA III

LEVELEZŐSŐK névneve

I. Kombinatorika

- Permutáció: adott n db egymástól különböző elem, melyek egy sorrendjét n -ed rendű permutáció-nak nevezzük. Az összes n -ed rendű permutáció számát P_n -et jelöljük.

$$P_n = n!$$

$$\text{Megjegyzés: } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n;$$

$$0! := 1$$

- Def.: adott n db elem, melyek közül $k_1, k_2, \dots, k_r$ db egymástól mindenkiben megfigyelt elem szerepel. Az így megadott n elem egy sorrendjét megfigyelt n -ed rendű ismétléses permutáció-nak nevezzük. Az összes n -ed rendű ismétléses permutáció számát $p_n^{k_1, k_2, \dots, k_r}$ -et jelöljük.

Kiszámítás:

$$p_n^{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}$$

P1: a) 16 ember közt kiosztunk 16 különböző levelet egymásnak, hogy mindenkinek egyet kap.

$$P_{16} = 16!$$

b) 16 ember közt kiosztunk 16 levelet, melyek közül 4 db A és 6 db B típusú levelet. Mindenkinek egyet kap.

$$P_{16}^{4,6} = \frac{16!}{4! \cdot 6!}$$

- Def.: adott n darab egymástól különböző elem, melyek közül kiválasztunk egy k elemű halmazt (az elemek sorrendje nem számít), az így kiválasztott

k elemű halmazt, az n elemű k -ad osztályú kombinációjának nevezzük. Az n elemű összes k -ad osztályú kombinációjának a számát C_n^k -val jelöljük.

$$C_n^k = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

• Def.: Adott n darab egymástól különböző elem, ezek közül kiválasztunk k db elemet úgyis-
don, hogy a kiválasztott elemek sorrendjére
nem vagyunk érzékenyek, azaz egy elem több-
ször is szerepelhet. Ez így kiválasztott k da-
rab elemet az n elem k -ad osztályú is-
métléses kombinációjának nevezzük.

$$C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$$

Pl.: Hányféleképpen rakhatunk 5 db krumpli 16
kukorba a) egy kukorba legfeljebb csak 1-et kaphat?
b) egy kukorba többet is kaphat?

a) $C_{16}^5 = \binom{16}{5} = \frac{16!}{11! \cdot 5!}$ b) $C_{16}^{5,i} = \binom{16+5-1}{5} = \binom{20}{5}$

c) Hány fék képpen rakhatunk 5 különböző
krumplit egy kukorba?

• Def.: Adott n db egymástól különböző elem, ezek
közül kiválasztunk k darab elemet, ezeknek
egy sorrendje az n elem k -ad osztályú vari-
ációjának nevezzük.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

- Def.: Utdoh n db egymástól különböző elem, ezek közül kiválasztunk k db elemet, úgy-
mondva, hogy egy elem többször is szerepelhet a
az elemek sorrendjére is tekintettel vagyunk. Az így
kiválasztott k elemet az n elem k -ad osza-
lélyi ismétléses variációjának nevezzük.

$$V_n^{k, i} = n^k$$

II. Valószínűség számítás

1) Események, eseményalgebra

- Def.: Készen (megfigyelt) „legkisebb” kiemeltet ele-
mi eseménynek nevezzük.
- az összes elem események halmazát esemény-
térnek nevezzük és Ω -val jelöljük.
- az $A \subset \Omega$ halmazt eseménynek nevezzük, amit
úgy kell érteni, ha $\omega \in \Omega$ elemi esemény be-
történik,
- ha $\omega \in A$ úgy azt mondjuk, hogy az A esemény
beértékelik
- ha $\omega \notin A$ ————, hogy A esemény nem kö-
vetkezik be

Pl.: Kockadobás

ω_i : i -t dobunk a kockával ($i=1 \dots 6$)

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$ események

A párosat dobunk $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

A $C \cap \Omega$ esemény

• Def.: Irt az eseményt, amely mindig bekövetkezik, biztos eseménynek hívjuk. It biztos eseményt be lehet mondani Ω -val (hiszen $\Omega \subset \Omega$). Irt az eseményt, mely soha sem következik be lehetetlen eseménynek hívjuk. It lehetetlen eseményt be mondhatjuk $\emptyset$ -val (hiszen $\emptyset \subset \Omega$).

Pl.: G-nál nagyobb dobunk - lehetetlen

• Def.: (műveleti eseményekkel)

- It A esemény ellentett (komplement) esemény azt az eseményt értjük, amely akkor következik be ha az A esemény nem következik be.
jele: $\bar{A}$

- It esemény A és B uniója (összege) azt az eseményt értjük, amely pontosan akkor következik be, ha az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezik. jele: $A \cup B$; $A + B$

- It esemény A és B metszete (szekesi) azt az eseményt értjük, amely pontosan akkor következik be, ha az A és B esemény is egyszerre következik be. jele: $A \cap B$; $A \cdot B$

- It esemény A és B kizárólagja azt az eseményt értjük, amely pontosan akkor következik be, ha az A bekövetkezik és a B nem következik be.

jelle: $A \setminus B$; $A - B$

• Tétel 1: (Műveleti tulajdonságai)

kommutativitás: $A \cup B = B \cup A$

$$A \cap B = B \cap A$$

asszociativitás: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

idempotencia: $A \cup A = A$

$$A \cap A = A$$

distributivitás: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

de Morgan szabály: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

különbség: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

• Def.: az A és a B eseményeket diszjunktoknak nevezzük, (egymást kizáró események), ha az A és a B események egyben nem következhetnek be. Azaz $A \cap B = \emptyset$

itt mondjuk, hogy az A eseményt nagya után vagy a B eseményt, ha az A esemény minden bekövetkezésekor a B esemény is bekövetkezik
 $A \Rightarrow B$

Példa: kockával dobás

- párosat ill. páratlant dobunk diszjunkt esemény.
- 2-t ill. 3-t dobunk diszjunkt
- 2 dobás nagy után vagy, hogy párosat dobunk

it közelebbi elviselesek

$$A \Rightarrow B$$

$$A \subset B$$

$$B \subset A$$

$$B \Rightarrow A$$

• Definíció: (esemény algebra): Ha Ω események közhalmazainak (események) egy A halmazánál esemény algebra ha Ω tartalmazza a biztos eseményt, Ω -t és zárt a komplement-képzés és zárt a végeselemképzés.

(It zárt a komplementképzés: ha $A \in \mathcal{A}$ akkor $A^c \in \mathcal{A}$)

(It zárt az unió képzés: ha $A, B \in \mathcal{A}$ akkor $A \cup B \in \mathcal{A}$)

megjegyzés: $\emptyset \in \mathcal{A}$ (ha Ω is esemény algebra)

mert, $\emptyset = \Omega^c$

↳ levezetett esemény

Ha $A, B \in \mathcal{A}$ úgy $A \cap B \in \mathcal{A}$, ha $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ úgy $(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \in \mathcal{A}$

Definíció: It esemény algebraat esemény σ -algebra-nak nevezik, ha Ω is tartalmazza a végeselem nélküli unióképzést.

Ha $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$ akkor $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Megjegyzés: Ha $\mathcal{A}$ algebra és $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$ úgy $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Példa: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$; $|\Omega| = n$

2^n az Ω összes közhalmazainak halmaza, halmazok halmaza

$$2^\Omega = \{A : A \subset \Omega\} \quad |2^\Omega| = 2^n$$

legyen $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$; 2^Ω megadható

Példa: Egy esemény jelölésével

$$\Omega = \{I, F\} \quad 2^\Omega \text{ esemény: } \emptyset, \{I\}, \{F\}, \Omega$$

2. Relatív gyakoriság, valószínűség:

Def.: Egy kísérlet eredményeire kimeneteket az A esemény. Ha a n kísérlet során az A esemény bekövetkezett k alkalommal, az A esemény relatív gyakoriságának nevezzük. Jelle $k_n(A)$.
($k_n(A)$ értéke $0, 1, \dots, n$ lehet)

Ha A esemény relatív gyakorisága $r_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$ azaz.

Megjegyzés: Ha a kísérletek számát n -t növeljük, úgy $r_n(A)$ egyre kisebb mértékben ingadozik egy számszám körül, az a szám $P(A)$, az A esemény valószínűsége.

Tétel: (1-relatív gyakoriság tulajdonságai)

a.) $0 \leq r_n(A) \leq 1$

b.) $r_n(\Omega) = 1$; $r_n(\emptyset) = 0$

c.) Ha A és B diszjunkt események
 $r_n(A \cup B) = r_n(A) + r_n(B)$

d.) Ha $A_1, A_2, \dots$ pároként diszjunkt események
 $r_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = r_n(A_1) + r_n(A_2) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} r_n(A_i)$

$$e.) P_n(\bar{A}) = 1 - P_n(A)$$

$$P_n(A) = 1 - P_n(\bar{A})$$

$$f.) \text{ Ha } A \subset B (A \Rightarrow B) \text{ akkor } P_n(A) \leq P_n(B)$$

Ez a tétel elég erős ahhoz, hogy a valószínűségi tételek alapján tevékenység kifejezését valósítsuk meg.

* VIZSGA

Def.: (valószínűségi méréz) Legyen Ω egy nem üres halmaz, $\mathcal{A}$ a 2^Ω egy σ -algebra (események halmaza).

$P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ függvény, amely

$$a.) P(\Omega) = 1$$

b) valószínűség σ -additív: Ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ páronként diszjunkt események, akkor

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

A $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármas valószínűségi mérést, jelezzük P -t valószínűségi mérést az A esemény valószínűségének az értéke.

* VIZSGA

Def.: (a valószínűség tulajdonságai)

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi méréz. Ekkor

$$a.) P(\emptyset) = 0$$

b) a valószínűség véges additív: Ha $A_1, \dots, A_n$ páronként diszjunkt $\mathcal{A}$ -beli halmazok, akkor

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

$$c.) P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$d.) \text{ Ha } A \subset B (A \Rightarrow B) \text{ akkor } P(A) \leq P(B) \text{ (valószínűség monotonitása)}$$

$$e.) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$f.) P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

• Def.: (diszkrét valószínűségi méré, eloszlás)

Legyen Ω egy véges halmaz, azaz $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

vagy Ω egy megszámlálható végtelen halmaz

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ $n=2^{\aleph_0}$, $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ egy valószínűségi mérést $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ -t diszkrét valószínűségi mérést nevezzük.

$P_i = P(\{\omega_i\})$ valószínűségi eloszlások nevezzük.

Megjegyzés: $A \in \mathcal{A}$, $P(A) = ?$

$$\text{mivel } A = \bigcup_{\omega_i \in A} \{\omega_i\} \text{ egy } P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) =$$

$$= \sum_{\omega_i \in A} P_i$$

• Def.: (klasszikus valószínűségi méré) olyan diszkrét valószínűségi méré, ahol Ω véges halmaz, tehát $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ és minden ω_i esemény valószínűsége egyenlő, azaz $P_i = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$

$$\text{Megjegyzés: } P(A) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{\text{A események száma}}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|} =$$

$$= \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}$$

Példa: Kockával dobunk

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$n = 2^{\aleph_0}$$

$$P(\text{2-es dobunk}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{párosat dobunk}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{nagyobbat dobunk 5-nél}) = \frac{4}{6}$$

3. Előadás

Pl. Kockával dobunk

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\mathcal{A} = 2^\Omega$$

$$P(\text{2-es dobott}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{párosat dobunk}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{számszorzat dobunk 5-nél}) = \frac{4}{6}$$

Def: (Geometria mértéktérje mértéke)

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d=1, 2, 3$) egy véges mértékű halmaz

$$\mathcal{A} = 2^\Omega \text{ - belső mértékű halmazok}$$

$$A \subset \Omega \text{ belyes } P(A) = \frac{M(A)}{M(\Omega)} \text{ ahol } M(A) \text{ az } A \text{ halmaz}$$

mértéke $\mathbb{R}^d$ -ben.

$$d=1 \quad M(A) \text{ az } A \text{ halmaz hossza}$$

$$d=2 \quad M(A) \text{ az } A \text{ halmaz területe}$$

$$d=3 \quad M(A) \text{ az } A \text{ halmaz térfogata}$$

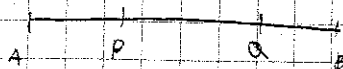
Példa: 1.) 10 m hosszú és 2,5 m magas épület, melyre van 2 db 2x1 ablak.

Mekkora az esély, hogy betörés az ablak, ha lődörrel rúgnak?

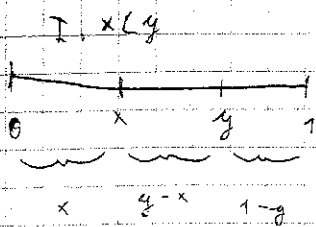
/A lőszerű fegyver minden pontját egyenlő eséllyel találja el./

$$P(\text{betörés az ablak}) = \frac{\text{ablakok területe}}{\text{épület területe}} = \frac{2 \cdot 2}{10 \cdot 2,5} = \frac{4}{25}$$

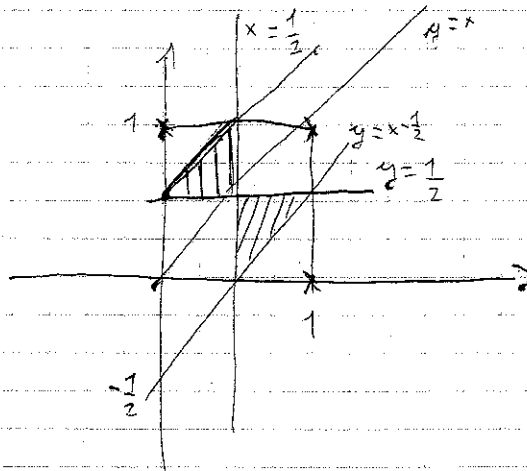
2.)



$$P(\Delta \text{ reaktív}) = ?$$



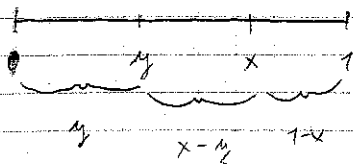
(x, y) admissible



$$\left. \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + (y-x) > 1-y \\ x + (1-y) > y-x \\ (y-x) + (1-y) > x \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y > 1-y \\ x+1-y > y-x \\ 1-x > x \end{array} \right\} \begin{array}{l} y > \frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2} > y \\ \frac{1}{2} > x \end{array}$$

II. $y < x$



$$\left. \begin{array}{l} y + (x-y) > (1-x) \\ y + (1-x) > (x-y) \\ (x-y) + (1-x) > y \end{array} \right\} \begin{array}{l} x > 1-x \\ y+1-x > x-y \\ 1-y > y \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x > \frac{1}{2} \\ y > x - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} > y \end{array} \right\}$$

Probléma felvetés:

Egy édesgyermek családjában tudjuk, hogy az első gyermek fiú. Mi annak a valószínűsége, hogy a második is fiú? $\frac{1}{2}$

Egy nő két feladványra tudja, hogy pontos dolma.

Mi a valószínűsége, hogy

a) 2-t dolma? $\frac{1}{3}$

b) 3-t dolma? 0

$P(2\text{-t dolma} \mid \text{pontos dolma})$

↑
feltétel

Def: (Feltétel valószínűség)

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mérő, A, B események ($A, B \in \mathcal{A}$)

és $P(B) > 0$

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A esemény B feltétel mellett valószínűsége

Példa:

$$P(\underbrace{\text{második gyermek is fiú}}_A \mid \underbrace{\text{első gyermek fiú}}_B) = \frac{P(\text{első gyermek fiú és 2. gyermek is fiú})}{P(\text{első gyermek fiú})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P(\underbrace{2\text{-t dolma}}_A \mid \underbrace{\text{pontos dolma}}_B) = \frac{P(2\text{-t dolma})}{P(\text{pontos dolma})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(\underbrace{3\text{-t dolma}}_A \mid \underbrace{\text{pontos dolma}}_B) = \frac{P(\text{lehetetlen esemény})}{P(\text{pontos dolma})} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0$$

Példa: 2 gyermek valószínűsége, hogy az egyik gyermek lány.

FF

FL

LF

LL

13

Mi a valószínűsége, hogy van legalább egy fiú?

$$P(\text{van legalább egy fiú} \mid \text{egy gyermek lány}) = \frac{P(\text{egy fiú és egy lány})}{P(\text{egy gyermek lány})} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

Tétel (A feltételes valószínűség tulajdonságai)

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mérő, B egy esemény

$$P(B) > 0$$

$$a) 0 \leq P(A|B) \leq 1$$

$$b) P(B|B) = 1$$

c) legyen $A_1, \dots, A_n$ páronként diszjunkt esemény

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \mid B\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i \mid B)$$

d) legyenek $A_1, \dots, A_n, \dots$ páronként diszjunkt események

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B)$$

Tétel (láncszabály)

$A_1, \dots, A_n$ események

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

$$\text{ahol } P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$$

Példa:

32 lap, 3 lapot kihúsnak. Mi annak a valószínűsége, hogy az első és a harmadik piros és a második nem piros?

A_i : i -edik húzott kártya piros ($i = 1, 2, 3$)

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = ?$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) &= P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap \bar{A}_2) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{24}{37} \cdot \frac{7}{30} \end{aligned}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{8 \cdot 24 \cdot 7}{\sqrt{32}} = \frac{8 \cdot 24 \cdot 7}{32 \cdot 37 \cdot 30}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 24 & 7 \end{array}$$

Def: Legyenek $B_1, \dots, B_n$ események. $A, B_1, \dots, B_n$ események teljes eseményrendszer
alkotnak, ha pontosan egyike események $(B_i \cap B_j = \emptyset \text{ ha } i \neq j)$ és
uniójuk mindig a biztos eseményt, azaz $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$

Tétel: (Teljes valószínűség tétel)

Legyen $B_1, \dots, B_n$ teljes eseményrendszer, A egy esemény és $P(B_1) > 0, \dots, P(B_n) > 0$

Ekkor

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

Példa: Bolgári 151/15

db	találat
3	0,15
2	0,6
1	0,8

$$P(\underbrace{\text{találat}}_A) = \overset{\text{előrejelölés valószínűsége}}{P(A|B_1)} \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3)$$

B_1 : előrejelölés valószínűsége

B_2 : második körben valószínűsége

B_3 : harmadik körben valószínűsége

$$\begin{aligned} P &= 0,15 \cdot \frac{3}{6} + 0,6 \cdot \frac{2}{6} + 0,8 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1,5 + 1,2 + 0,8}{6} = \\ &= \frac{3,5}{6} \end{aligned}$$