

Tétel (Bayes tétel)

Legyen $B_1, \dots, B_n$ teljes eseményrendszer, $P(B_1) > 0, \dots, P(B_n) > 0$,
 $P(A) > 0$.

$$\text{Ekkor } P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i) \cdot P(B_i)}$$

Balcsi 158/5

Példa: férfiak 5%-a, nők 0,25%-a ninnak 20 nő és 5 férfi székkel

Elválasztunk egy embert. Megállapítjuk, hogy ninnak.

Mi annak a valószínűsége, hogy nőt választottunk?

$$P\left(\underbrace{\text{nő}}_{B_1} \mid \underbrace{\text{ninnak}}_A\right) = \frac{P(A | B_1) \cdot P(B_1)}{P(A | B_1) \cdot P(B_1) + P(A | B_2) \cdot P(B_2)}$$

$$B_2: \text{férfi} \quad = \frac{0,0025 \cdot \frac{20}{25}}{0,0025 \cdot \frac{20}{25} + 0,105 \cdot \frac{5}{25}} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{férfi} \mid \text{ninnak}) = \frac{5}{6}$$

Def: Legyen A és B két esemény. A és B -t független
eseményeknek nevezzük, ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Tétel: (Függetlenség ekvivalens alakjai)

Legyenek A, B pozitív valószínűségű események. A kölcsönösen független

a) A és B független események

b) $P(A | B) = P(A)$

c) $P(B | A) = P(B)$

Pé: Két érmet feldobunk. Mi annak a valószínűsége, hogy 2 fej-es dobnak?

A_i : i -edik érmevel fej-es dobnak $i = 1, 2$

$$P(2 \text{ fej-es dobnak}) = P(A_1 \cap A_2) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{függetlenség}}}{P(A_1)} \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(2 \text{ írást dobnak}) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} P(1 \text{ írás és } 1 \text{ fej-es dobnak}) &= P((A_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2)) = P(A_1 \cap \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) = \\ &= P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \end{aligned}$$

Def: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ eseményeket páronként függetlennek

nevezünk, ha bármely kettőt kiválasztva független eseményeket kapunk.

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ eseményeket teljesen függetlennek nevezünk, ha bármely $i_1, \dots, i_k$ indexre

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

egyenlőség teljesül.

Megjegyzés:

Megadható 3 esemény oly módon, hogy páronként függetlenek, de nem teljesen függetlenek.

$$\left. \begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1) \cdot P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1) \cdot P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2) \cdot P(A_3) \end{aligned} \right\} \text{teljesül, de } P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

II (3) Valószínűségi változó, eloszlásfüggvény

Motiváció: Valószínűségi változó olyan függvény, amely értékeit véletlenesülven vesszük fel.

Példa: 1.) Egy kockát dobunk. Legyen a kocka értéke a dobott szám.

2.) 4 érmét dobunk. A dobott fejek száma.

3.) Addig dobunk kockával, amíg 6-t nem dobunk. A dobások száma.

4.) Választunk egy számot $[0, 200]$ intervallumon.

Def: A $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény valószínűségi változó nevezzük,

ha minden $x \in \mathbb{R}$ valós szám esetén $\{ \omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x \} \in \mathcal{A}$, azaz

a $\{ \omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x \}$ halmaz esemény.

(tehát meg tudjuk mondani a valószínűségeit)

$$\text{jelölés: } \{ \xi \leq x \} := \{ \omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x \}$$

A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye F_ξ

$$F_\xi(x) := P(\xi \leq x)$$

Példa: A ξ -al valószínűségi változó a $-1, 0, 1, 3$ értékeket vesszük fel, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$ valószínűségekkel.



$$x \leq -1$$

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x) = P(\emptyset) = 0$$

$$-1 < x \leq 0$$

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi = -1) = \frac{1}{2}$$

$$0 < x \leq 1$$

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi = -1) + P(\xi = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

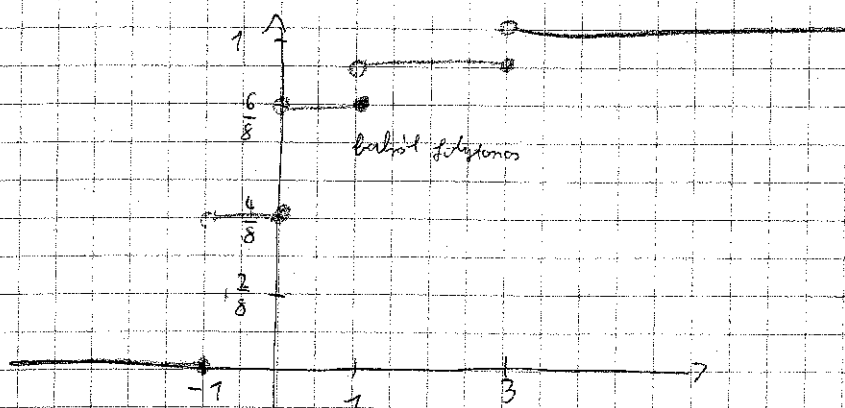
$$-1 < x < 3$$

18

$$F_3(x) = P(\{ \leq x \}) = P(\{ = -1 \}) + P(\{ = 0 \}) + P(\{ = 1 \}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$3 < x$$

$$F_3(x) = P(\{ \leq x \}) = P(\Omega) = 1$$



Összefoglalás:

$$F_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < -1 \\ \frac{4}{8} & \text{ha } -1 \leq x < 0 \\ \frac{6}{8} & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{8} & \text{ha } 1 \leq x < 3 \\ 1 & \text{ha } 3 \leq x \end{cases}$$

Tétel: (Az eloszlásfüggvény tulajdonságai)

Egy $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény valamely ξ valószínűség változó eloszlás

függvényét pontosan akkor ($\Leftrightarrow$) 1. ha teljesülnek a következők:

a) monoton növekvő

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

c) balról folytonos

$$P(\{X\}) = F_X(x)$$

$$P(\{X \geq x\}) = 1 - P(\{X < x\}) = 1 - F_X(x)$$

$$P(X \in \{x\}) = P(\{X < y\}) - P(\{X < x\}) = F_X(y) - F_X(x)$$

Valószínűséget lehet az eloszlásfüggvénnyel meghatározni!

$$p.e.: F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ x/5 & \text{ha } 0 \leq x \leq 5 \\ 1 & \text{ha } 5 < x \end{cases}$$

$$P(\{X < 3\}) = F_X(3) = \frac{3}{5}$$

$$P(\{X \geq 2\}) = 1 - F_X(2) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P(2 \leq X < 3) = F_X(3) - F_X(2) = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

Def: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi tér, a $\{X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi

változót diszkrét valószínűségi változóval nevezzük, ha

$\{X$ értékeire megszámlálható sorozat $\}$ lehetőségei értelmez

$x_1, \dots, x_n, \dots$, illetve $p_i = P(\{X = x_i\})$ számait a

$\{$ eloszlási sűrűséssel $\}$

Megjegyzés: 1.) p_i számok $(i = 1, 2, \dots)$ valamely diszkrét valószínűségi

változó eloszlását alkotják $\Leftrightarrow$ a) $p_i \geq 0$ minden i -re

$$b) \sum p_i = 1$$

2.) Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye mindig

lépcsős függvény, amely a $\{$ lehetőségei értékeire

x_i -kén ugrik és az ugrások nagysága a $P(\{X = x_i\}) = p_i$

szám.

Példa: diszkrét valószínűségi változó

(fejést egy órá 7-3 példa)
 $2 = a_2$
 $3 = a_3$

4. példa nem diszkrét valószínűségi változó

Def: $A \subseteq \mathbb{R}$ valószínűségi változó folytonos valószínűségi

21

változás néven ismert, ha van olyan $f_f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény,

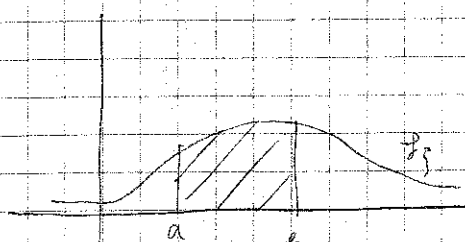
hogy minden $a < b$ -re

$$F_f(b) - F_f(a) = \int_a^b f_f(x) dx$$

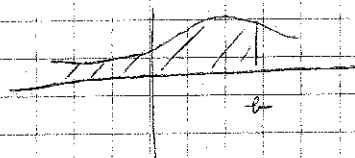
Ekkor a f_f ~~függvény~~ $-t$ a $\}$ folytonos val. változó sűrűségfüggvénye néven is.

Megfigyelés:

$$1.) P(a \leq \zeta < b) = F_f(b) - F_f(a) = \int_a^b f_f(x) dx$$



$$2.) P(\zeta < b) = F_f(b) = \int_{-\infty}^b f_f(x) dx$$



3.)

$$f_f(x) = F_f'(x)$$

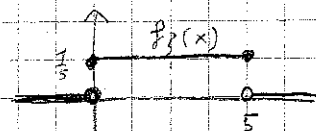
Deriváltak hányad

Tétel: (A sűrűségf. tulajdonságai)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amely $\}$ folytonos val. változó sűrűségfüggvénye $\Leftrightarrow$

a) $f(x) \geq 0$ minden x -re

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$



Példa:

$$F_f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ \frac{x}{5} & \text{ha } 0 \leq x \leq 5 \\ 1 & \text{ha } 5 < x \end{cases}$$

$$\rightarrow f_f(x) = F_f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{máskor} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5} & \text{ha } 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{máskor} \end{cases}$$

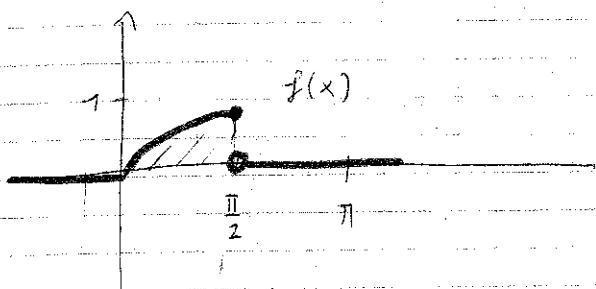
Példa:

22

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{máskor} \end{cases}$$

f nemnegatív-e?

a) $f(x) \geq 0$ minden x -re $\checkmark$



$$b) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} 0 dx =$$

$$= 0 + \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 0 =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = -0 + 1 = 1 \checkmark$$

Tekint nemnegatív.

II/4 Várható érték, várás.

Motiváció: 4 érdekes feladatunk { a dolgot fejezi ki, "átlagosan" 2

figyeljünk

{ "átlagosan" milyen értéket vesz fel? }

Def: Legyen { egy diszkrét val. változó, melynek értékei

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ és előfordulási valószínűségei $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$

Esetek { várható értéket $E\{ \}$ -vel jelöljük és $E\{ \} = \sum_i x_i p_i$,

ha $\sum_i |x_i| p_i < +\infty$

(Ha $\sum_i |x_i| p_i = +\infty$, akkor azt mondjuk, hogy a

várható érték nem létezik)

Példa: 4 elemű felosztás } a dalok sorszáma
} értékei (x_i) : 0, 1, 2, 3, 4
elválasztás (p_i) : $\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16}$

$$E\{X\} = \sum x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{32}{16} = 2$$

Def: Legyen $\{X\}$ egy folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f_X .

Ekkor a $\{X\}$ folyt. val. változó várható értékét $E\{X\}$ -et jelöljük

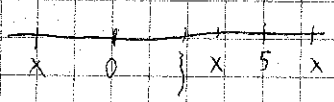
$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx, \text{ ha } \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_X(x) dx < \infty.$$

(Ha $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_X(x) dx = +\infty$, akkor azt mondjuk, hogy a várható érték nem létezik)

Példa:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{ha } 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{máskor} \end{cases}$$

$[0, 5]$ -en valószínű egy pontot, $\{X\}$ legyen ez a r.q.f.



$$F_X(x) = P(\{X\} \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ \frac{x}{5} & \text{ha } 0 \leq x \leq 5 \\ 1 & \text{ha } 5 < x \end{cases}$$

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 dx}_{=0} + \int_0^5 x \cdot \frac{1}{5} dx + \underbrace{\int_5^{\infty} 0 dx}_{=0} = \int_0^5 \frac{1}{5} x dx = \left[\frac{1}{5} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^5 =$$

$$= \frac{5^2}{10} - 0 = 2,5$$

- Tétel: (A várható érték tulajdonságai)
- a) $\{X\}$ valószínűségi változó, $E\{X\}$ létezik.
 - b) $E\{X + Y\} = E\{X\} + E\{Y\}$ (additivitás)
 - c) $E\{c \cdot X\} = c \cdot E\{X\}$ (homogenitás)
 - d) $E\{a \cdot X + b \cdot Y\} = a \cdot E\{X\} + b \cdot E\{Y\}$ (linearitás)

- e) Ha $\{X\} \geq \eta$ akkor $E\{X\} \geq E\{\eta\}$ (monotonitás)
- f) Ha $\{X\} \geq 0$ akkor $E\{X\} \geq 0$ (pozitivitás)
- g) Ha $\{X\}$ és $\{Y\}$ függetlenek akkor $E\{X \cdot Y\} = E\{X\} \cdot E\{Y\}$

Zh: diszkrét val. változó eloszlása, $f_X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ilyenig

binomiális
hipergeometriai eloszlás

Def: Legyenek $\zeta_1, \dots, \zeta_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változók, a
 $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ val. változókat függetlennek nevezzük, ha

$$P(\zeta_1 < x_1, \zeta_2 < x_2, \dots, \zeta_n < x_n) = P(\zeta_1 < x_1) \cdot P(\zeta_2 < x_2) \cdot \dots \cdot P(\zeta_n < x_n) \text{ minden } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \text{ re}$$

Megjegyzés: 1. A és B független, ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

2. Itt $\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}$

$$F_\zeta(x_1, \dots, x_n) = P(\zeta_1 < x_1, \dots, \zeta_n < x_n)$$

$$\text{függetlenség} \Leftrightarrow F_\zeta(x_1, \dots, x_n) = F_{\zeta_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\zeta_n}(x_n)$$

Tétel: Legyenek ζ, η diszkrét val. változók, ζ értékei $x_1, \dots, x_n$ és

η értékei $y_1, \dots, y_n$

$$\zeta \text{ és } \eta \text{ függetlenek} \Leftrightarrow P(\zeta = x_i \text{ és } \eta = y_j) = P(\zeta = x_i) \cdot P(\eta = y_j)$$

minden
 $i, j \in \mathbb{N}$

Def: A ζ valószínűségi változó várható értéke $E\zeta$ létezik, a ζ várakozásértéke

$D^2\zeta$ a "kovariancia" alakban megadott szám

$$D^2\zeta = E(\zeta - E\zeta)^2$$

$$\zeta \text{ szórása: } D\zeta = \sqrt{D^2\zeta}$$

Tétel: (1. számú tulajdonságok) ζ val. változó és $E\zeta$, $D^2\zeta$ létezik

a) $D^2\zeta = E(\zeta^2) - (E\zeta)^2$

b) $D^2(\zeta + c) = D^2\zeta$ ahol c egy adott valós szám

c) $D^2(a\zeta) = a^2 D^2\zeta$ minden a adott valós szám esetén

d) Itt $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ független val. változók, akkor

$$D^2(\zeta_1 + \dots + \zeta_n) = D^2\zeta_1 + D^2\zeta_2 + \dots + D^2\zeta_n$$

eloszlás

Diszkrét egyenletes eloszlás: Legyenek $x_1, \dots, x_n$ számok

ξ értékei: $x_1, \dots, x_n$

$$P(\xi = x_i) = \frac{1}{n} \text{ minden } i\text{-re}$$

Példa: Kockával dobunk, legyen ξ a dobott szám

$$P(\xi = n) = \frac{1}{6} \quad i = 1, \dots, 6$$

Várható érték:

$$E\xi = \sum x_i p_i = \sum x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \text{az } x_1, \dots, x_n \text{ számok}$$

mértani közepes (átlaga)

Szórásnégyzet

$$D^2\xi = E(\xi^2) - (E\xi)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \frac{1}{n} - \bar{x}^2 =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

pl: fenti

$$E\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+\dots+6}{6} = 3,5$$

$$D^2\xi = 2$$

$$E(\xi^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$$

$$D^2\xi = E(\xi^2) - (E\xi)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

Binomiális eloszlás: Legyen n egy természetes szám ($n \geq 1$) és $0 < p < 1$

(n, p) paraméter

ξ valószínűségi változó binomiális eloszlású val. változóval nevezik,

ha ξ értékei: $0, 1, \dots, n$ és eloszlása

$$P(\xi = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \text{ahol } x = 0, 1, \dots, n$$

Tárlható értéke:

$$E\{X\} = n \cdot p$$

Szórás négyzete:

$$D^2\{X\} = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Regresszió: Ha kísérletet folytatunk egymás után függetlenül, akkor a kísérlet egy lehetséges kimenetelére $p = P(A)$ legyen az A bekövetkezésének a valószínűsége az n db kísérlet során. Ekkor a binomiális eloszlás val. v. v. (n, p) paraméterrel.

Példa: Egy családban 10 gyermek születik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük éppen 5 fiú lesz. (A fiú szület. való. = $\frac{1}{2}$ legyen).

A : fiú születik ; $p = P(A) = \frac{1}{2}$; $q = 1-p = \frac{1}{2}$; $n = 10$

$\{$: A fiú neve a 10. kísérlet során

$$P\{X=5\} = ?$$

p

$$P\{X=5\} = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10!}{5!5!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

Mennyi a fiú születését átlagos neve?

$$E\{X\} = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

Mennyi a fiú születésétől valószínűsége?

$$D^2\{X\} = n \cdot p \cdot (1-p) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2.5$$

Oldja meg $p = P(A) = 0.5$ - el is!

$$D\{X\} = \sqrt{D^2\{X\}} = \sqrt{2.5}$$

Tétel: (A Poisson-eloszlás mint a binomiális eloszlás ^{elérhető} határértéke)

legyen p kicsi és n nagy oly módon, hogy $n \cdot p = \lambda$ állandó. Ekkor

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k \leq n \rightarrow \infty)$$

Példa: Egy forgalmas postahivatalban 365 nap alatt 1017 db bélyeg nélküli levelet adnak fel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy nap 2-nél több bélyeg nélküli levelet adnak fel.

$\{X\}$ = egy napon feladott bélyeg nélküli levelek száma

$$E\{X\} = \frac{1017}{365} \approx 2.8 = n \cdot p \Rightarrow n = ? \quad p = ? \quad \text{nem adható meg!}$$

$$P\{X > 2\} = ? \quad P\{X > 2\} = 1 - P\{X \leq 2\} = 1 - (P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\})$$

n nagy, h és p levelet követel fel.

27

$$\lambda = np = 2.8$$

$$P(j=0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} \approx \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = \frac{2.8^0}{0!} e^{-2.8} = e^{-2.8}$$

$$P(j=1) = \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} \approx \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \frac{2.8^1}{1!} e^{-2.8} = 2.8 e^{-2.8}$$

$$P(j=2) = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} \approx \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \frac{2.8^2}{2} e^{-2.8}$$

$$P(j>2) = 1 - \left(e^{-2.8} + 2.8 e^{-2.8} + \frac{2.8^2}{2} e^{-2.8} \right).$$

Poisson-eloszlás

28 32,

Definíció: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi tér, legyen $\lambda > 0$ egy rögzített szám. Azt mondjuk, hogy a $\{X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ val. v. ált. } \lambda \text{ paraméterű Poisson-eloszlású val. v. ált.}, \text{ hogy ha } \{ \text{értékei: } 0, 1, 2, \dots \text{ és eloszlása}$

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Várható érték:

$$E\{X\} = \lambda$$

Szórásnégyzet:

$$D^2\{X\} = \lambda$$

Feladat: 1, Kálás mesternek 1 kg töltetű 30 mm mészelt töltetű. Rajta a kő mészelt felszerelésű 5 db-os rekettye. Mennyi a valószínűsége, hogy egy rekettyén 2-nél több mészelt van?

2, Augustusi éjszakai átlag 10 százalékát elérhető csillaghullás. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy reggelre alatt két csillaghullást látunk?

Geometriai eloszlás (elsőrendű negatív binomiális eloszlás)

Legyen egy kísérlet egy kimenetű, az A esemény, $p = P(A)$. A kísérletet addig folytatjuk végre amíg A először be nem következne. Legyen $\{X\}$ a kísérletok száma (az utolsó kísérletet is beleértve amikor A bekövetkezik).

$\{X\}$ értékei: $1, 2, \dots, n$ és $P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} \cdot p$

Várható érték: $E\{X\} = \frac{1}{p}$, Szórásnégyzet: $D^2\{X\} = \frac{1-p}{p^2}$

Feladat: Egy átlagosan 10 percenként 1 valószínűséggel hívunk fel. $\frac{2}{3}$ valószínűséggel nem hívunk fel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 5-dik hívás a sikeres? Mennyi a valószínűsége, hogy

$$E\{X\} = 3 \quad P\{X=5\} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{243}$$

Adott n elemű halmazból s darabot megkülönböztetünk (legyenek ezek a „jók”) a többi $n-s$ darabotól.

n darabot kivétel nélkül visszatérve nélkül $(n \leq S, n \leq n-s)$

Legyen j a kiválasztott n darab elem között a „jók” száma.

akkor j értékei: $0, 1, \dots, n$ és $P(j=k) = \frac{\binom{s}{k} \binom{n-s}{n-k}}{\binom{n}{n}}$

és j -t hipergeometrikus eloszlásúnak nevezzük.

Legyen p a „jók” aránya az összhalmaz ~~halmaz~~, azaz

$$p = \frac{s}{n}$$

Várható érték: $Ej = n \cdot p$; $Dj^2 = n \cdot p \cdot (1-p) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n-1}\right)$

Feladat: Tegyük fel, hogy halmazból kivétel nélkül 4 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 2 vöd van közöttük?

j : a vödök száma

$$n=32, \quad s=8 \quad n-s=24$$

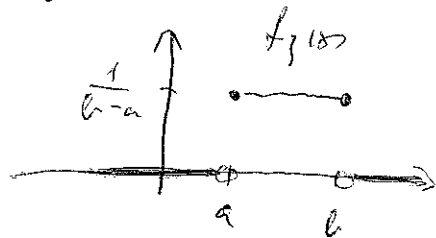
$$P(j \geq 2) = ?$$

↳ Vagyis hogy vöd van a 4 lap között? $Ej = n \cdot p = 32 \cdot \frac{1}{4} = 8$

Eszközök elosztása (a, b) intervallumon

Definíció: Legyen $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, P)$ egy Kolmogorov-féle val. mérő, legyen $[a, b]$ egy intervallum. Azt mondjuk, hogy a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fgt. eloldható val. vált. egyenlet eloldható az $[a, b]$ intervallumon, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{1}{x-a}$$



Vonlató esteke:

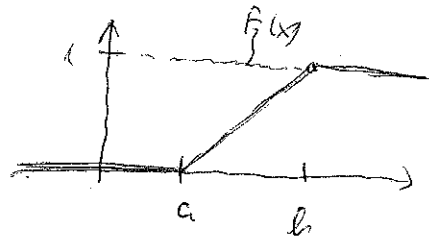
$$E_f = \frac{a+b}{2}$$

Stone's regret:

$$b^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Elonka's függvénye:

$$\bar{F}_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{be } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{be } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{be } x > b. \end{cases}$$



Reptiles: Cole

Pelda:

Legyen } egyenletes eloszlás az (a, b) intervallumon. Az a, b ismeretlen, de $(2, 5) \subset (a, b)$ és $P(2 \leq X \leq 5) = \frac{1}{3}$.

$a, p \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{J} \subseteq \mathbb{S}) = ?$

$$b, a_{\min} = ? \quad b_{\max} = ?$$

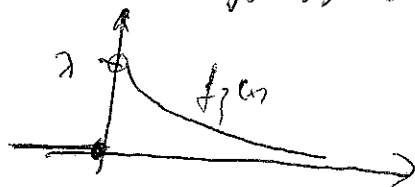
c_3 Kugel besitzt Abstand $P(1 \leq j \leq 3)$ vordrängungsfähig?

megjegyzés: Adott az $[a, b]$ intervallum, az intervallum minden pontját vizsgálva kell vizsgálni valószínűségeket, legyen $a \leq x$ kiértékelve szám értéke. Ekkor annak valószínűsége, hogy $a \leq x \leq b$ $P(a \leq x \leq b) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$ (vagy $F(b) - F(a)$ ha a sűrűségfüggvény $f(x)$ is megadott).
Ha az $[a, b]$ intervallum közepét vizsgáljuk, $E[x] = \frac{a+b}{2}$

λ paraméterű exponenciális eloszlás

Definíció: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi térrel, $\lambda > 0$ egy valós szám. Azt mondjuk, hogy a $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jelöltes eloszlású val. v. v. λ paraméterű exponenciális eloszlású val. v. v., ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) := \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{máskor.} \end{cases}$$



Várható érték:

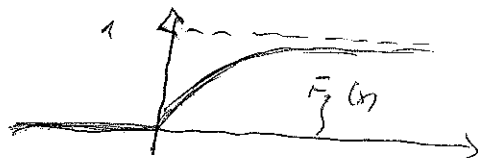
$$E\{X\} = \frac{1}{\lambda}$$

Szórás négyzet:

$$D^2\{X\} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{máskor} \end{cases}$$



Példa: Amek val.-e, hogy egy kocsitól 6 percnél többet kell várakozni, a tapasztalat szerint 0,1. A várakozási idő exp. eloszlású. Mi annak a való.-e, hogy egy gépkocsi 3 percen belül some kénül? Tudjuk, hogy egy gépkocsi már 3 perccel várakozott, mi annak a való.-e, hogy továbbra 3 percen belül some kénül.

Tétel: Az exponenciális eloszlás ~~memória~~ ^{örök ifjú} tulajdonságú, azaz

$$P\{X < x+t \mid X \geq t\} = P\{X < x\} \text{ és}$$

$$P\{X \geq x+t \mid X \geq t\} = P\{X \geq x\} \text{ egyenlőségek teljesülnek.}$$

Megjegyzés: Általában a várakozási idő az az idejűtől exponenciális eloszlásúnak tekinthető.

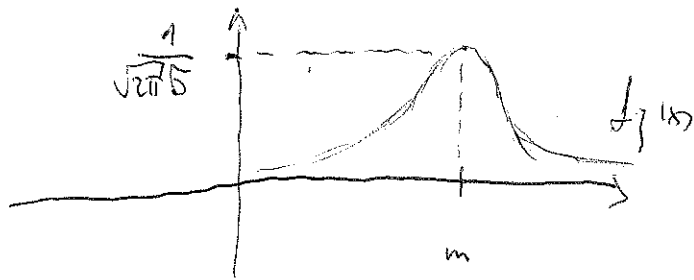
(m, σ) paraméterű normális eloszlás:

32

37

Definíció: Legyen $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, P)$ egy Kolmogorov-féle valószínűségi téren, legyen m egy tetszőleges valós szám, $\sigma > 0$ valós szám. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ^{val. v. v. v.} X valószínűségi változó (m, σ) paraméterű normális eloszlású val. v. v., ha sűrűségfüggvénye:

$$f_X(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{ahol } x \in \mathbb{R}.$$

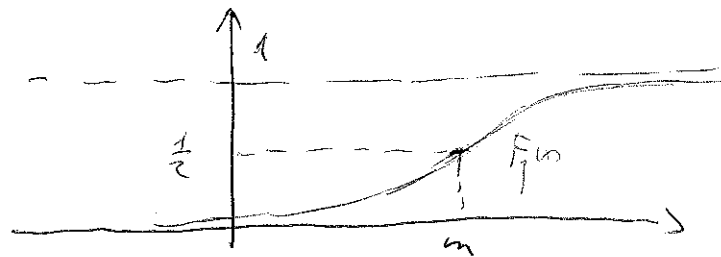


Várható értéke: $E[X] = m$

Variancia négyzete: $D^2[X] = \sigma^2$

Eloszlásfüggvénye:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$



Elnevezés: $m=0$, $\sigma=1$ esetén standard normális eloszlásról beszélünk, sűrűségfüggvényét $\varphi(x)$ -el, eloszlásfüggvényét $\Phi(x)$ -el jelöljük.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\text{és } \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

3. házi feladat!

Regisztráció: Mivel Φ értékei nem számolhatóak könnyen ezért Φ értékeit táblázatok segítségével (integrál közelítő összeget segítségével számolták ki.)

2. Ha x negatív akkor az nem szerepel a táblázatban, mert $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ ill.

Példa: Egy gyári minőségellenőrzést végez. Egy bizonyos alkatrész eltarthatósága a vizsgáltatónak szerint normális eloszlású, 1170 óra várható értékkel és 100 óra szórással. A gyári az alkatrészre garanciát vállal. Ha az óra működésére alapján a garancia, ha a gyári legfeljebb 5% garancia igényt kéri kielégíteni?

$$m = 1170, \quad \sigma = 100$$

$$P(\bar{X} < t) \leq 0,05$$

$$t = \text{garancia idő} \quad 33$$

$\bar{X}$ = átlag

$$P\left(\frac{\bar{X} - m}{\sigma} < \frac{t - m}{\sigma}\right) = 0,05$$

$$\Phi\left(\frac{t - m}{\sigma}\right) = 0,05$$

Nem szerepel a táblázatban!
Mért? Mert $\frac{t - m}{\sigma} < 0$ kell legyen!

$$\Phi\left(-\frac{t - m}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{t - m}{\sigma}\right) = 0,95$$

$$-\frac{t - 1170}{100} = 1,65 \quad / \cdot (-100)$$

$$t - 1170 = -165 \quad / + 1170$$

$$t = 1005 \text{ óra}$$

megjegyzés: $\bar{X}$ normális eloszlású (m, σ) paraméterekkel.

Ha $\frac{\bar{X} - m}{\sigma} \sim t$ a $\bar{X}$ standardizálással keveredik, és a t standardizált normális eloszlású.

(m, σ) paraméterekkel normális eloszlású.

Tétel: 1. Korreláció egyenlőtlensége, mint a függetlenség mérőszáma)

36

ξ és η val. váltakozó $E\xi, E\eta$ létezik, $D\xi, D\eta > 0$

Ekkor

a) Ha ξ és η függetlenek, akkor $\text{cor}(\xi, \eta) = 0$

b) $|\text{cor}(\xi, \eta)| \leq 1$

függvény 0. fokú állapota

-1 0 +1

$\eta = a\xi + b$
 $a < 0$

$\eta = a\xi + b$ (lineáris kapcsolat)
 $a > 0$

c) Ha $|\text{cor}(\xi, \eta)| = 1$ akkor $\eta = a\xi + b$ teljesül 1 valószínűséggel

(ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$)

Ráadásul $a > 0 \Leftrightarrow \text{cor}(\xi, \eta) = +1$

$a < 0 \Leftrightarrow \text{cor}(\xi, \eta) = -1$

II.9.: A regressziós függvény

Tétel: (Markov egyenlőtlenség)

Legyen $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ val. váltakozó, $E\xi$ létezik, $E\xi > 0$ és $\xi \geq 0$

$$P(\xi \geq E\xi) \leq \frac{E\xi}{E\xi}$$

Tétel: (Chebyshev egyenlőtlenség)

Legyen $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ val. váltakozó, $E\xi, D\xi$ létezik, legyen $E\xi > 0$.

$$\text{Ekkor } P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi^2}{\varepsilon^2}$$

Megjegyzés:

$$P(|\xi - E\xi| < \varepsilon) = 1 - P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq 1 - \frac{D\xi^2}{\varepsilon^2}$$

Teljesít

$$P(|\xi - E\xi| < \varepsilon) \leq 1 - \frac{D\xi^2}{\varepsilon^2}$$

$\{$: az átlagos értékek átlagoló gépessége

$$E\{ = 500, D\{ = 25$$

$P(400 < \{ < 600)$ valószínűségét keressük

$$P(400 < \{ < 600) = P(-100 < \{ - E\{ < 100) = P(|\{ - E\{| < 100) \leq 1 - \frac{D^2\{}{E^2}$$

$$= 1 - \frac{25^2}{100^2} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

Megjegyzés: $\{$ eloszlása ismeretlen!

Ita $\{$ eloszlását ismerjük, akkor

11.17.

Elmélet

Tétel: (Bernoulli - jelű nagy számú kísérlet)

Adott egy kísérlet, melynek kimenetele az A esemény. $p = P(A)$

k kísérletet végeztünk n -szer egymás után, az A esemény előfordulási-száma k ($\frac{k}{n}$ az A esemény relatív gyakorisága). $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

és

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

Megjegyzés: p értéke ismert ismeretlen, ismétlődő kísérlet
alakban vizsgálva:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

és

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Feladat:

36

Egy gyártmány 10%-a hibás a tétel elfogadását,

ha legfeljebb $12 \frac{9}{10}$ hibás.

Mekkora legyen a tételben a darabszám (n) / hogy a
hibás átl. relatív gyakorisága "megfelelő" legyen
legalább 0,95 valószínűséggel.

**Bernoulli-
tétel**

A : hibás a áru

$$p = P(A) = 0,1$$

$$\varepsilon = 0,02 (= 2\%)$$

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \geq 0,95$$

$$1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \geq 0,95$$

$$1 - \frac{0,1 \cdot 0,9}{n \cdot 0,02^2} \geq 0,95$$

$$0,05 \geq \frac{0,09}{n \cdot 0,02^2}$$

$$n \geq \frac{0,09}{0,02^2 \cdot 0,05}$$

$$n \geq 4500$$

Feladat: 5000 terméket megvizsgálunk, aminek 80 selejteket találunk

$$\frac{\bar{x}}{n} = \frac{80}{5000} = 0,016$$

az ismeretlen

p valószínűsége 90%-os

hírtérővel mennyire közelíti meg?

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \geq 0,90$$

$$1 - \frac{1}{4 \cdot 5000 \cdot \varepsilon^2} \geq 0,9$$

$$0,1 \geq \frac{1}{20000 \varepsilon^2}$$

$$\varepsilon^2 \geq \frac{1}{2000}$$

37

$$|\varepsilon| \geq \sqrt{\frac{1}{2000}} \approx 0,022$$

$$P\left(\left|\frac{80}{5000} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 0,9$$

$$\frac{80}{5000} - \varepsilon \leq p \leq \frac{80}{5000} + \varepsilon$$

$$0,016 - 0,022 \leq p \leq 0,016 + 0,022$$

$$0 \leq p \leq 0,038$$

Tétel: (Centrális határeloszlás tétele)

Legyenek $\{1, \dots, n\}$ azonos eloszlású független valószínűségi változók.

$$E\{z_i\} = m \text{ és } E\{z_i^2\} = G$$

$$\text{Legyen } S_n = \{z_1 + \dots + z_n\} \text{ ekkor}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n \cdot m}{\sqrt{n} \cdot G} \leq x\right) = \Phi(x)$$

Megjegyzés: $S_n = \{z_1 + \dots + z_n\}$ egy valószínűségi változó,

$$E S_n = n \cdot m, D^2(S_n) = n \cdot G$$

$\frac{S_n - E S_n}{D(S_n)}$ az S_n valószínűségi változó standardizáltja.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{S_n - E S_n}(x)}{D(S_n)} = \Phi(x)$$

Következtetés: Ha n nagy, akkor a binomialis eloszlás eloszlásfüggvényét jól közelíthetjük a normális eloszlás eloszlásfüggvényével!

Példá:

Egy tételre 40% hibátlan

38

260/6

$n = 200$ db - at vizsgálva mintavétel

$$P(100 - \text{nál kevesebb a hibás}) = ?$$

$\{$ a ^{hibásak} ~~hibásak~~ száma, akkor $\}$ binomiális eloszlású

$$p = P(\text{hibás}) = 0,4$$

$$P(\{ = k \}) = \binom{200}{k} 0,4^k \cdot 0,6^{200-k}$$

$$P(\{ < 100 \}) = \sum_{k=0}^{99} \binom{200}{k} 0,4^k \cdot 0,6^{200-k}$$

$$\approx F_{\{}(100)$$

$$E\{ = n \cdot p = 200 \cdot 0,4 = 80$$

$$D^2\{ = n \cdot p \cdot (1-p) = 200 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 48$$

$$P\left(\frac{\{ - E\{}{D\{} < x\right) \approx \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{D\{}}}\right)$$

$$P(\{ < 100) = P\left(\frac{\{ - E\{}{D\{} < \frac{100 - 80}{\sqrt{48}}\right) \approx \Phi\left(-\frac{20}{\sqrt{48}}\right) =$$

$$= \Phi(-2,88) = 1 - \underbrace{\Phi(2,88)}_{\text{táblázatból}} = 1 - 0,998 = 0,002$$