A matematika alapjai

Nagy Károly

2014
Javított, bővített változat (2020)

Nyíregyházi Egyetem
Matematika és Informatika Intézet

Tartalomjegyzék

1. Kijelentéslogika, ítéletkalkulus

1.1. Definíció. *Azokat a kijelentő mondatokat, amelyekről egyértelműen el lehet dönteni, hogy igazak-e vagy hamisak,* ***kijelentéseknek*** *nevezzük. Az igaz, hamis értékeket logikai értékeknek nevezzük és 1, (i)-el vagy 0, (h)-val jelöljük. A legegyszerűbb (tovább nem bontható) kijelentéseket* ***atomi kijelentéseknek*** *nevezzük. Az atomi kijelentésekből* ***összetett kijelentéseket*** *készíthetünk az értékelési alapelv figyelembe vételével. A kijelentéseket* ***kijelentésváltozókkal*** *jelöljük. Ezek $A, B, C \ldots$. Az A kijelentés logikai értékét $|A|$-val jelöljük. Ezek szerint $|A| = 1$ vagy $|A| = 0$.*

<u>A következő elveket kell figyelembe venni:</u>

ellentmodástalanság elve: egy kijelentés nem lehet egyszerre igaz is és hamis is.

a harmadik kizárásának elve: egy kijelentés vagy igaz vagy hamis, harmadik lehetőség nincs.

értékelési alapelv: az atomi kijelentésekből (komponensekből) összetett kijelentéseket készítünk a logikai műveletek segítségével, csak azokat a műveleteket tekintjük logikai műveleteknek, amelyeknél a komponensek logikai értékei az összetett kijelentés logikai értékét egyértelműen meghatározzák.

Példa: A következő mondatok közül melyik kijelentés?
A jelenlegi francia király Magyarországra érkezett tegnap.
$2 \cdot 2 = 4$.
A zebra csíkos állat.
Ez a mondat hamis.
Milyen színű a kabátod?
Az 5 prímszám.

<u>Logikai összekötőjelek:</u>

Neve	Jele	Jelentése
negáció	$\neg$	„Nem igaz, hogy …”
konjunkció	$\wedge$	„ … és …”
diszjunkció	$\vee$	„ … vagy …”
implikáció	$\supset$	„ Ha …, akkor …”

1.2. Definíció (Logikai összekötőjelek értelmezése). *Az* $(A \wedge B)$ *formula pontosan akkor igaz, ha az* A *és a* B *egyszerre igaz.*

Az $(A \vee B)$ *formula pontosan akkor igaz, ha az* A *és* B *közül legalább az egyik igaz.*

A $\neg A$ *formula pontosan akkor igaz, ha az* A *formula hamis.*

Az $(A \supset B)$ *formula pontosan akkor hamis, ha az* A *előtag igaz és a* B *utótag hamis egyszerre.*

Ez megadható Quine-féle táblázatban is

A	B	$(A \wedge B)$	$(A \vee B)$	$(A \supset B)$	$\neg A$	$\neg B$
1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1

Megjegyzés: A köznyelvben kétféle vagy van a megengedő vagy és a kizáró vagy. A diszjunkció a megengedő vagy.

1.3. Definíció (Induktív definíció). *Kijelentésváltozókból, logikai összekötőjelekből és zárójelpárokból álló jelsorozatokat* ***kijelentéslogikai formulának*** *nevezzük, ha a következő szabályok szerint kapjuk meg.*

Bázis:

a.) Ha A *kijelentésváltozó, akkor* A *a kijelentéslogika formulája.*

Indukciós lépés:

b.) Ha A *és* B *a kijelentéslogika formulája, akkor* $(A \wedge B)$*;* $(A \vee B)$*;* $(A \supset B)$*;* $\neg A$*;* $\neg B$ *is kijelentéslogikai formulák.*

Más jelsorozatok nem formulák a kijelentéslogikában.

Megjegyzés: A kijelentéslogika minden formulája vagy
a) kijelentésváltozó
vagy
b) az indukciós lépés véges sokszori alkalmazásával nyert formula.

Példa: A következő jelsorozatok kijelentéslogikai formulák-e?
$\neg(\neg A)$ (nem, mert negáció nem rak maga köré zárójeleket),
(AB) (nem, logikai összekötőjel hiányzik az A és a B között),
$A \vee B \supset C$ (nem, zárójelpárok hiányoznak),
$((A \wedge B) \supseteq C)$ (nem, nincs ilyen logikai összekötőjel „$\supseteq$”),
$(A \wedge B) \supset$ (nem, implikáció utótagja hiányzik),
$A \supset B)$ (nem, a zárójel párja hiányzik),
$((A \supset C) \wedge (B \vee \neg C))$ (igen, felépíthető az induktív definícióval).

További logikai összekötőjelek:

Neve	Jele	Jelentése
ekvivalencia	$\equiv$	,,...pontosan akkor, ha ...”
sem-sem művelet	$\|$	,, Sem ..., sem ...”
Scheffer-művelet	$\mid$	,,Nem igaz, hogy ...és ...”
Alternáció (kizáró vagy)	$\oplus$	,, ...vagy ...”

Azaz

$$\begin{aligned}(A \equiv B) &\rightleftharpoons ((A \supset B) \wedge (B \supset A)),\\ (A \| B) &\rightleftharpoons (\neg A \wedge \neg B),\\ (A|B) &\rightleftharpoons \neg(A \wedge B),\\ (A \oplus B) &\rightleftharpoons ((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)).\end{aligned}$$

Quine-féle táblázatban

A	B	$(A \equiv B)$	$(A\|B)$	$(A\mid B)$	$(A \oplus B)$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0

Megállapodások rövidítésekről:

- Külső zárójelek elhagyhatóak.
- Ekvivalencia, sem-sem művelet, Scheffer-művelet és alternáció használata.
- Logikai összekötőjelek prioritása: a prioritás nő a következő sorrendben

$$\begin{matrix}\equiv & \supset & \wedge & \neg\\ & & \vee & \end{matrix}$$

- A ponthasználat konvenciója: Azonos prioritás esetén a jobbról álló pont jelöli a zárójelen belüli leggyengébb logikai összekötőjelet. (Mi ezt csak az implikáció esetén fogjuk használni.)

Példa: Tekintsük át a korábbi példánkat! Van-e a megadott példák között olyan, amely a rövidítéseket figyelembe véve kijelentéslogikai formula lesz?

Igen, a $A \vee B \supset C$ kifejezés formula lesz.

Jelentése:

$$((A \vee B) \supset C).$$

Példa:

a.)

$$P \supset (Q \vee R \equiv \neg R \supset \neg P)$$

rövidített formula jelentése:

$$(P \supset ((Q \vee R) \equiv (\neg R \supset \neg P)))$$

b.)

$$P \supset (Q \vee R \supset .\neg R \supset \neg P)$$

rövidített formula jelentése:

$$(P \supset ((Q \vee R) \supset (\neg R \supset \neg P)))$$

c.)

$$(P \supset Q \supset .R) \vee P \supset Q$$

rövidített formula jelentése:

$$((((P \supset Q) \supset R) \vee P) \supset Q)$$

1.4. Definíció. *Egy kijelentéslogikai formula **nyelvi interpretációján** a benne szereplő kijelentésváltozók konkrét kijelentésekkel való helyettesítését értjük. Egy kijelentéslogikai formula **interpretációján** a benne szereplő kijelentésváltozók logikai értékének megadását értjük.*

Megjegyzés: Az interpretáció megadásakor kiválasztunk a formula értéktáblázatából egy sort.

2. A kijelentéslogika törvényei

2.1. Definíció. *A kijelentéslogika egy A formulája logikai törvény vagy azonosan igaz formula, vagy tautológia, ha A igaz minden interpretációban.*

Jelölés: $\models A$.

Az A formula logikailag ellentmondásos, vagy kontradikció, ha minden interpretációban hamis.

Az A formula kielégíthető, ha van olyan interpretáció amelynél A igaz.

Az A és B formulák logikailag ekvivalensek, ha az $(A \equiv B)$ formula logikai törvény.

Jelölés: $A \sim B$.

Példa: Készítse el az $A \equiv (B \vee C \supset .C \supset \neg A)$ formula értéktáblázatát! Döntsük el, hogy kontradikció-e, kielégíthető-e, logikai törvény-e!

A	B	C	$(A$	$\equiv$	$((B$	$\vee$	$C)$	$\supset$	$(C$	$\supset$	$\neg$	$A)))$
1	1	1		0		1		0		0	0	
1	1	0		1		1		1		1	0	
1	0	1		0		1		0		0	0	
1	0	0		1		0		1		1	0	
0	1	1		0		1		1		1	1	
0	1	0		0		1		1		1	1	
0	0	1		0		1		1		1	1	
0	0	0		0		0		1		1	1	
				5.)		1.)		4.)		3.)	2.)	

A formula értéktáblázatának a főoszlopa az 5.) oszlop. Ez alapján mondhatjuk, hogy a formula kielégíthető, nem kontradikció és nem logikai törvény.

Logikai törvények:

Asszociativitás:

1.) $A \wedge (B \wedge C) \sim (A \wedge B) \wedge C$,

2.) $A \vee (B \vee C) \sim (A \vee B) \vee C$.

Kommutativitás:

3.) $(A \wedge B) \sim (B \wedge A)$,

4.) $(A \vee B) \sim (B \vee A)$.

Disztributivitás:

5.) $A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,

6.) $A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Idempotencia:

7.) $A \wedge A \sim A$,

8.) $A \vee A \sim A$.

Elimináció:

9.) $A \wedge (A \vee B) \sim A$,

10.) $A \vee (A \wedge B) \sim A$.

De Morgan törvények:

11.) $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$,

12.) $\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$.

Az implikáció tagadása:

13.) $\neg(A \supset B) \sim A \wedge \neg B$.

Ellentmondás az implikációban:

14.) $A \supset \neg A \sim \neg A$,

15.) $\neg A \supset A \sim A$,

16.) $\models \neg(A \equiv \neg A)$.

Logikai jelek közötti összefüggések:

17.) $A \wedge B \sim \neg(\neg A \vee \neg B)$,

18.) $A \vee B \sim \neg(\neg A \wedge \neg B)$,

19.) $A \supset B \sim \neg(A \wedge \neg B)$,

20.) $A \supset B \sim B \vee \neg A$,

21.) $A \wedge B \sim \neg(A \supset \neg B)$,

22.) $A \vee B \sim \neg A \supset B$.

Kontrapozíció törvénye:

23.) $A \supset B \sim \neg B \supset \neg A$.

Kétszeres tagadás törvénye:

24.) $\neg\neg A \sim A$.

Előtagok felcserélése implikációban:

25.) $A \supset (B \supset C) \sim B \supset (A \supset C)$.

Implikáció konjunktív előtaggal:

26.) $(A \wedge B) \supset C \sim A \supset (B \supset C)$.

Jelölés:

Legyen C egy tetszőleges kijelentés változó.
$\top := (C \vee \neg C)$ „szabvány igaz”,
$\bot := (C \wedge \neg C)$ „szabvány hamis”.

Kiszámítási törvények:

27.) $A \vee \top \sim \top$,

28.) $A \vee \bot \sim A$,

29.) $A \wedge \top \sim A$,

30.) $A \wedge \bot \sim \bot$,

31.) $A \supset \top \sim \top$,

32.) $A \supset \bot \sim \neg A$,

33.) $\top \supset A \sim A$,

34.) $\bot \supset A \sim \top$.

Azonosság törvénye:

35.) $\models A \supset A$.

Bővítés előtaggal:

36.) $\models A \supset (B \supset A)$.

Az implikáció öndisztributivitása:

37.) $A \supset (B \supset C) \sim (A \supset B) \supset (A \supset C)$.

Esetelemzés (implikáció diszjunktív előtaggal):

38.) $(A \vee B) \supset C \sim (A \supset C) \wedge (B \supset C)$.

Tranzitivitás:

39.) $\models ((A \supset B) \wedge (B \supset C)) \supset (A \supset C)$.

Reductio ad absurdum:

40.) $\models ((A \supset B) \wedge (A \supset \neg B)) \supset \neg A$.

Negáció az implikációs előtagban:

41.) $\models A \supset (\neg A \supset B)$.

A kizárt harmadik törvénye:

42.) $\models A \vee \neg A$.

Az ellentmondás törvénye:

43.) $\models \neg(A \wedge \neg A)$.

Pierce-törvény:

44.) $\models ((A \supset B) \supset A) \supset A$.

Megjegyzés: A kijelentéslogikai törvényeket értéktáblázattal bizonyíthatjuk.

Példa: Bizonyítsuk be a 40. Reduktio ad absurdum logikai törvényt!

A	B	$((A \supset B)$	$\wedge$	$(A \supset$	$\neg B$	$)) \supset$	$\neg A$
1	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

Megjegyzés: A kijelentéslogikai törvények ismeretében további megállapodásokat teszünk a rövidítésekről.

- Az asszociativitás miatt többtagú konjunkció, diszjunkció leírható zárójelek nélkül.
- Az idempotencia törvény miatt beszélhetünk egytagú konjunkcióról, diszjunkcióról.

Megjegyzés: Az assziciativitás törvény miatt a konjunkció és diszjunkció esetében nincs értelme a ponthasználat konvenciójának. Az implikáció nem asszociatív művelet, ezért alkalmazzuk rá a ponthasználat konvencióját.

3. Logikai törvények alkalmazása 1: diszjunktív normálforma és konjunktív normálforma.

3.1. Definíció. *Egy kijelentésváltozót vagy a negáltját literálnak nevezzük.*

Legyenek $L_1, L_2, ..., L_n$ *literálok* ($n \geq 1$)*. Az* $(L_1 \wedge L_2 \wedge ... \wedge L_n)$ *alakú formulákat elemi konjunkciónak, az* $(L_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_n)$ *alakú formulákat elemi diszjunkciónak nevezzük.*

Legyenek $K_1, K_2, ..., K_m$ *elemi konjunkciók (ahol* $m \geq 1$*), ekkor a* $(K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_m)$ *alakú formulákat diszjunktív normálformának (d.n.f.) nevezzük.*

Legyenek $D_1, D_2, ..., D_m$ *elemi diszjunkciók (ahol* $m \geq 1$*), ekkor a* $(D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_m)$ *alakú formulákat konjunktív normálformának (k.n.f.) nevezzük.*

Megjegyzés: Egy literál elemi konjunkció és elemi diszjunkció is (válasszunk a definícióban $n = 1$-t), de k.n.f. és d.n.f. is (válasszunk a definícióban $n = m = 1$-t) egyszerre.

Egy elemi konjunkció d.n.f is (és k.n.f. is) és egy elemi diszjunkció k.n.f. is (és d.n.f. is) (válasszunk a definícióban $m = 1$-t ($n = 1$-t)).

3.1. Lemma. *A kijelentéslogika minden formulája konjunktív normálformára ill. diszjunktív normálformára hozható, azaz logikailag ekvivalens valamely konjunktív normálformával ill. diszjunktív normálformával.*

Bizonyítás: Megadunk egy algoritmust, amellyel mindig megkapjuk a d.n.f. illetve a k.n.f. alakot.

0.) A hiányzó zárójeleket kirakjuk.

1.) A logikai törvények segítségével kicseréljük az implikációt és az ekvivalenciát az $\wedge, \vee, \neg$ jelekre.

2.) A de Morgan és a kétszeres tagadás törvényeket többször egymás után alkalmazva elérjük, hogy a negációk csak a komponensekre vonatkozzanak.

3.) A disztributivitás törvényeket használva elérjük azt, hogy a konjunkciók és a diszjunkciók a megfelelő sorrendben kövessék egymást.

4.) Egyszerűsítünk. (Használjuk az idempotencia, az elimináció és a kiszámítási törvényeket.)

Példa: Hozzuk d.n.f. illetve k.n.f. alakra az $(A \supset (B \wedge \neg C)) \supset C$ formulát!

$$
\begin{aligned}
((A \supset (B \wedge \neg C)) \supset C) \;&\sim\; C \vee \neg(A \supset (B \wedge \neg C)) \quad \text{(kicseréljük az } \supset\text{-t)}\\
&\sim\; C \vee \neg((B \wedge \neg C) \vee \neg A) \quad \text{(kicseréljük az } \supset\text{-t)}\\
&\sim\; C \vee (\neg(B \wedge \neg C) \wedge \neg\neg A) \quad \text{(de Morgan törv.)}\\
&\sim\; C \vee ((\neg B \vee \neg\neg C) \wedge \neg\neg A) \quad \text{(de Morgan törv.)}\\
&\sim\; C \vee ((\neg B \vee C) \wedge A) \quad \text{(kétszeres tagadás törv.)}\\
&\sim\; C \vee (\neg B \wedge A) \vee (C \wedge A) \quad \text{(disztributivitás) d.n.f.}\\
&\sim\; C \vee (\neg B \wedge A) \quad \text{(elimináció) d.n.f. alak}\\
&\sim\; (C \vee \neg B) \wedge (C \vee A) \text{ (disztributivitás) k.n.f.}
\end{aligned}
$$

4. Logikai következmény

4.1. Definíció. *Jelölje Γ a kijelentéslogika véges sok formulájának a halmazát, A pedig a kijelentéslogika egy formuláját. Azt mondjuk, hogy A logikai következménye (szemantikai következménye) a Γ-beli formuláknak (jelölés: $\Gamma \models A$), ha az A és a Γ-beli formulák minden olyan interpretációja esetén, amikor az Γ-beli formulák mindegyike igaz, akkor az A is igaz lesz. Ha a Γ a $B_1, B_2, ..., B_n$ formulákból áll, úgy ezeket premisszáknak (feltételeknek), az A-t konklúziónak (zárótételnek) nevezzük.*

Jelölések: $\Gamma \models A$,

$B_1, B_2, ..., B_n \models A$,

$$\frac{B_1, B_2, ..., B_n}{A},$$

$$\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \\ \hline A \end{array}$$

Ezeket a formációkat következtetési sémáknak is nevezzük.

4.1. Tétel. *Egy A formula pontosan akkor logikai következménye a $B_1, B_2, ..., B_n$ formuláknak, ha a $(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n) \supset A$ formula logikai törvény.*

Jelekkel: $B_1, B_2, ..., B_n \models A$ *akkor és csakis akkor, ha* $\models (B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n) \supset A$.

Példa: Az $\neg A \vee B, C \supset \neg B$ formuláknak logikai következménye-e a következő formula?

a.) $A \supset \neg C$

b.) $A \vee \neg C$

A feladatot értéktáblázattal oldjuk meg. Az értéktáblázatban mindkét konklúziót feltüntetjük.

A	B	C	$\neg A \vee B$	$C \supset \neg B$	$A \supset \neg C$	$A \vee \neg C$
1	1	1	1	0		
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1		
1	0	0	0	1		
0	1	1	1	0		
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1

a.) Az aláhúzott sorokban a premisszák egyszerre igazak, a konklúzió is igaz. Tehát $A \supset \neg C$ logikai következmény.

b.) A 7. sorban a premisszák egyszerre igazak, a konklúzió pedig hamis. Tehát $A \vee \neg C$ nem logikai következmény.

Megjegyzés: A definícióval egyenértékű megfogalmazás: helyes a következtetés, ha nincs olyan interpretáció, amelynél a premisszák mind igazak a konklúzió pedig hamis.

Példa: Az $A \supset (B \supset C), \neg D \vee \neg A, B$ formuláknak logikai következménye-e a $D \supset C$ formula?

Értéktáblázattal 16 sort kellene írnunk, így most a megjegyzésünk figyelembevételével fogjuk megoldani:

Tegyük fel a megjegyzés ellenkezőjét, azaz van olyan interpretáció, amikor a P_1, P_2 és P_3 premisszák egyszerre igazak és a K konklúzió hamis.

Ezt az interpretációt keressük.

Tehát $|P_1| = |P_2| = |P_3| = 1$ és $|K| = 0$.

Vegyük $0 = |K| = |D \supset C|$-t, ez csak úgy lehet, ha $|C| = 0$ és $|D| = 1$.

Vegyük $1 = |P_3|$-t, amiből $|B| = 1$ adódik, majd tekintsük $1 = |P_2| = |\neg D \vee \neg A|$-t, amiből azonnal adódik, hogy $|\neg A| = 1$ (hiszen $|\neg D| = 0$), azaz $|A| = 0$.

Most tekintsük a $1 = |P_1| = |A \supset (B \supset C)|$-t, ami teljesül (az $|A| = 0$, $|B| = 1$ és $|C| = 0$ logikai értékeket ismerjük).

Megtaláltuk a keresett interpretációt. Ez $|A| = 0$, $|B| = 1$, $|C| = 0$ és $|D| = 1$. Ezen interpretációnál $|P_1| = |P_2| = |P_3| = 1$ és $|K| = 0$, így nem logikai következménye a premisszáknak a zárótétel.

<u>Nevezetes következtetési sémák:</u>

Modus ponens:

$$\begin{array}{l} P \supset Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$$

Indirekt következtetési sémák:

$$\begin{array}{l} \neg P \supset Q \\ \neg P \supset \neg Q \\ \hline P \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \supset Q \\ P \supset \neg Q \\ \hline \neg P \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \neg P \supset Q \\ \neg Q \\ \hline P \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg P \supset \neg Q \\ Q \\ \hline P \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P \supset Q \\ \neg Q \\ \hline \neg P \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \supset \neg Q \\ Q \\ \hline \neg P \end{array}$$

Kontrapozíció:

$$\begin{array}{l} P \supset Q \\ \hline \neg Q \supset \neg P \end{array}$$

Láncszabály:

$$\begin{array}{l} P \supset Q \\ Q \supset R \\ \hline P \supset R \end{array}$$

Diszjunktív szillogizmus:

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ \neg P \\ \hline Q \end{array}$$

Bizonyítás: Csak néhányat látunk be, a többi hasonlóan megy.

Először az indirekt következtetési sémák közül látjuk be a másodikat. A tételünket fogjuk használni.

$((P \supset Q) \wedge (P \supset \neg Q)) \supset \neg P$ formula logikai törvény, (lásd 40. Reductio ad absurdum). Tehát a tételünk miatt logikai következmény.

Másodszor a kontrapozíciót mutatjuk meg. A tételünket fogjuk használni.

Megmutatjuk, hogy a $(P \supset Q) \supset (\neg Q \supset \neg P)$ formula logikai törvény. Tehát a tételünk miatt logikai következmény.

$$
\begin{aligned}
(P \supset Q) \ \supset\ & (\neg Q \supset \neg P) \sim \\
\sim\ & \neg(P \supset Q) \vee (\neg Q \supset \neg P) \quad \text{(impl. kifejezése diszjunkcióval)} \\
\sim\ & \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg\neg Q \vee \neg P) \quad \text{(impl. kifejezése diszjunkcióval)} \\
\sim\ & (\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg\neg Q \vee \neg P) \quad \text{(de Morgan törvények)} \\
\sim\ & (P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee \neg P) \quad \text{(kettős tagadás)} \\
\sim\ & (P \wedge \neg Q) \vee Q \vee \neg P \quad \text{(asszociativitás, d.n.f.)} \\
\sim\ & (P \vee Q \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee Q \vee \neg P)) \quad \text{(disztributivitás, k.n.f.)} \\
\sim\ & (\top \vee Q) \wedge (\top \vee \neg P)) \quad \text{(def. szabvány igaz)} \\
\sim\ & \top \wedge \top \quad \text{(kiszámítási törvények)} \\
\sim\ & \top \quad \text{(kiszámítási törvények).}
\end{aligned}
$$

(Lásd még 23. Kontrapozíció törvénye).

Harmadszor a láncszabályt mutatjuk meg. Szintén a tételünket fogjuk használni.

$((P \supset Q) \wedge (Q \supset R)) \supset (P \supset R)$ logikai törvény (lásd 39. Tranzitivitás). Tehát a tételünk miatt logikai következmény.

Utoljára a diszjunktív szillogizmust bizonyítjuk be. Ismét a tételünket szeretnénk használni. Megmutatjuk, hogy a $((P \vee Q) \wedge \neg P) \supset Q$ formula logikai törvény, így a tételünk miatt logikai következmény lesz. Hozzuk k.n.f. alakra!

$$
\begin{aligned}
((P \vee Q) \wedge \neg P) \supset Q \ \sim\ & ((P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg P)) \supset Q \quad \text{(disztributivitás)} \\
\sim\ & (\bot \vee (Q \wedge \neg P)) \supset Q \quad \text{(def. szabvány hamis)} \\
\sim\ & (Q \wedge \neg P) \supset Q \quad \text{(kiszámítási törvények)} \\
\sim\ & \neg(Q \wedge \neg P) \vee Q \quad \text{(impl. kifejezése diszjunkcióval)} \\
\sim\ & (\neg Q \vee P) \vee Q \quad \text{(de Morgan törvények)} \\
\sim\ & \neg Q \vee P \vee Q \quad \text{(k.n.f és d.n.f., asszociativitás)} \\
\sim\ & \neg Q \vee Q \vee P \quad \text{(kommutativitás)} \\
\sim\ & \top \vee P \quad \text{(def. szabvány igaz)} \\
\sim\ & \top \quad \text{(kiszámítási törvények).}
\end{aligned}
$$

5. A kijelentés logika műveleteiről

Attól függően, hogy hány kijelentésváltozó (komponens) szerepel a logikai műveletben beszélhetünk egy-, két-, n-változós logikai műveletről.

Egy n-változós művelet értéktáblázata 2^n sorból áll, hiszen n helyre választunk két érték (1 vagy 0) közül úgy, hogy a sorrend számít (ismétléses variációval számolunk). Egy ilyen értéktáblázat írja le az n-változós logikai műveletünket. Ahány egymástól különböző értéktáblázat van annyi egymástól különböző logikai műveletünk van. Az értéktáblázat 2^n sorának minden helyére két érték közül választhatunk ismét (ismétléses variációval számolunk), ez $2^{(2^n)}$ lehetőség. Tehát az n-változós logikai műveletek száma $2^{(2^n)}$.

A lehetséges egyváltozós műveletek száma $2^{(2^1)} = 4$. Ezek a következők:

$$A, \quad \neg A, \quad \top(\rightleftharpoons A \vee \neg A), \quad \bot(\rightleftharpoons A \wedge \neg A).$$

A kétváltozós műveletek száma $2^{2^2} = 16$. Ezek a következők (ha a változók A, B):

$$A, \quad \neg A, \quad B, \quad \neg B, \quad \top, \quad \bot, \quad (A \wedge B), \quad \neg(A \wedge B), \quad (A \vee B), \quad \neg(A \vee B),$$

$$(A \supset B), \quad \neg(A \supset B), \quad (B \supset A), \quad \neg(B \supset A), \quad (A \equiv B), \quad \neg(A \equiv B)$$

Felvetődik a következő kérdés. Ha adott egy ismeretlen n-változós logikai művelet értéktáblázata, akkor meg lehet-e konstruálni egy olyan logikai műveletet, amely logikailag ekvivalens az eredeti ismeretlen művelettel, azaz a megadott értéktáblázat tartozik hozzá.

A felvetett kérdésre a válasz igen, meg lehet konstruálni ilyen logikai műveletet.

Eljárás a keresett n-változós művelet elkészítésére: Kiválasztjuk azokat a sorokat, amelyekben a logikai művelet eredménye 1. Minden egyes ilyen sorhoz elemi konjunkciókat képzünk oly módon, hogy az igaz komponensek változatlanul és a hamis komponensek negálva szerepeljenek. A kapott elemi konjunkciókat diszjunkcióval kötjük össze. Az így kapott d.n.f. írja le a kérdéses műveletet. Lehetőségünk van k.n.f. megkonstruálására is.

Példa: A megadott értéktáblázathoz konstruáljon egy formulát!

A	B	C	$F(A,B,C)=?$	elemi konjunkciók
1	1	1	0	
1	1	0	1	$(A \wedge B \wedge \neg C)$
1	0	1	0	
1	0	0	0	
0	1	1	0	
0	1	0	1	$(\neg A \wedge B \wedge \neg C)$
0	0	1	1	$(\neg A \wedge \neg B \wedge C)$
0	0	0	0	

Tehát a keresett háromváltozós formula

$$F(A,B,C) \sim (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C).$$

6. A predikátumlogika nyelve

Jelen fejezetben szeretnénk motivációt nyújtani arra, hogy a kijelentéslogika nyelvétől elrugaszkodva egy sokkal általánosabb nyelv fogalmat definiáljunk. Természetesen ennek az újabb nyelvnek a predikátumlogika nyelve is része lehet. Így ez a fejezet lehet, hogy több kérdést fog felvetni, mint amennyit konkrétan megválaszol. De nem is a minden tekintetben korrekt válaszok megtalálása a célunk, hanem az, hogy megvilágítsuk a következő fejezet fogalmainak a jelentését.

6.1. Definíció. *Egy tulajdonságot, kapcsolatot, relációt* ***predikátumnak*** *nevezünk. Amiről állítunk valamit, azt* ***individuumnak (individuumnévnek)*** *nevezzük. A predikátumokat predikátumváltozókkal (nagybetűk), az individuumokat pedig kisbetűkkel jelöljük.*

Beszélhetünk egy- és többváltozós predikátumokról. Tehát általánosan írhatjuk $P(a_1, \ldots, a_n)$, ahol $n \geq 0$ (ahol P predikátumváltozó, az $a_1, \ldots, a_n$ individuumnevek). A predikátumokat sokszor $P(x_1, \ldots, x_n)$ alakban is megadhatjuk, ahol $x_1, \ldots, x_n$ individuumváltozók. A kijelentéseket nullváltozós predikátumoknak is tekinthetjük, jelölésük kijelentésváltozókkal (0-változós predikátumváltozókkal) történik. A $P(b_1, \ldots, b_n)$ (ahol $b_1, ..., b_n$ individuumnevek vagy individuumváltozók valamelyike) $n \geq 0$ kifejezést predikátumlogikai atomi formulának nevezzük.

Itt fontos észrevenni, hogy a következő műveleteket alkalmazhatjuk predikátumokra:

Konkretizáció: a predikátum változóiba individuumneveket helyettesítünk.

Átjelölés: a predikátum individuumváltozóit más individuumváltozókkal helyettesítjük. Ezekről a következő fejezetekben bővebben szó lesz.

6.2. Definíció (Induktív definíció). *A predikátumlogika formulái*

Bázis:

a.) Atomi formula a predikátumlogika formulája.

Indukciós lépés:

c.) Ha A és B formula, akkor $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $\neg A$, $\neg B$ is predikátumlogikai formulák.

d.) Ha A formula és x individuumváltozó, akkor $\forall x A$, $\exists x A$ is predikátumlogikai formulák.

Más jelsorozatok nem formulák a predikátumlogikában.

Példa: Építse fel az induktív definícióval az $((A \wedge \forall x \exists y B(x,y)) \supset \neg \exists x C(a,x))$ formulát!

$$
\begin{array}{lccc}
 & & ((A \wedge \forall x \exists y B(x,y)) \supset \neg \exists x C(a,x)) & \\
 & (A \wedge \forall x \exists y B(x,y)) & & \\
 & & \forall x \exists y B(x,y) & \neg \exists x C(a,x) \\
 & & \exists y B(x,y) & \exists x C(a,x) \\
\text{Bázis: } A & & B(x,y) & C(a,x)
\end{array}
$$

Példa: Formulák-e a következő kifejezések?
$\forall \forall A(x,y)$; $\forall A$; $\forall x, y A(x,y)$, $\neg \exists x B(x,y)$.

6.3. Definíció. *Predikátumlogikai formula interpretációján azt értjük, hogy helyettesítjük a benne szereplő predikátumváltozókat konkrét predikátumokkal, az individuumnevekhez konkrét individuumokat rendelünk hozzá. (nyelvi interpretáció)*

Példa: Legyenek x, y individuumváltozók.
Legyen $P(x,y)$ predikátum jelentése x az y gyermeke.
Mit jelent a következő formula?

$$\forall x \exists y P(x,y)$$

Példa: Fogalmazza meg a predikátumlogika nyelvén a következő mondatokat!

Pisti kék szemű. Pisti felesége kék szemű. Minden ember kék szemű. Van olyan ember aki kék szemű.

Jelölések:
x, y individuumváltozók (később ember típusú változók),
$f(x) = x$ felesége (egyváltozós függvény),
$a =$ Pisti, individuumnév (később ember típusú konstans),
$P(x)$: x kék szemű (egyváltozós predikátum).
Ekkor a mondataink:

$$P(a)$$

$$P(f(x))$$

$$\forall x P(x)$$

$$\exists x P(x)$$

De az utóbbi két mondatot

$$\forall y P(y), \quad \exists y P(y)$$

alakban is megadhatjuk.

6.4. Definíció. *Legyen $P(x)$ egy konkrét egyváltozós predikátum. $\forall x P(x)$ pontosan akkor igaz, ha minden „a" individuum esetén $P(a)$ igaz. $\exists x P(x)$ pontosan akkor igaz, ha van olyan „a" individuum, amelyre $P(a)$ igaz lesz.*

Példa: Fogalmazza meg a predikátumlogika nyelvén a következő mondatokat!

Mindenki szeret valakit.
Pisti minden embert szeret.
Pisti feleségét mindenki szereti.
Használjuk a korábbi példa jelöléseit! Továbbá, legyen
$S(x, y)$: x szereti y-t (kétváltozós predikátum).
Ekkor a mondataink:

$$\forall x \exists y S(x, y)$$

$$\forall y S(a, y)$$

$$\forall x S(x, f(a))$$

Példa: Az előző példa jelöléseivel mit jelentenek a következő formulák?

$$\forall x S(x, y)$$

$$\exists y S(x, y)$$

$$\forall x S(x, x)$$

Jelentés:
Mindenki szereti y-t.
x szeret valakit.
Mindenki szereti önmagát.

7. Elsőrendű nyelvek

7.1. Definíció. *Az* $\Omega =< \mathcal{S}rt,\ \mathcal{C}nst,\ \mathcal{F}n,\ \mathcal{P}r >$ *komponensekből álló rendezett négyest* ***elsőrendű nyelvnek*** *nevezzük, ha teljesülnek a következők:*

a.) $\mathcal{S}rt$ *egy nem üres halmaz, elemei a nyelv típusai. Minden* $\pi \in \mathcal{S}rt$ *típushoz szimbólumok megszámlálható rendszere tartozik, melyeket* π *típusú változóknak nevezünk. Ezek:* $x_1^\pi, x_2^\pi, ...$ *vagy csak egyszerűen:* $x_1, x_2, ...$

b.) $\mathcal{C}nst$ *az* Ω *nyelv konstansainak a halmaza (lehet üres halmaz is). Minden* $c \in \mathcal{C}nst$ *konstansnak valamely* π *típushoz kell tartoznia.*

c.) $\mathcal{F}n$ *az* Ω *nyelv függvényszimbólumainak (függvényjeleinek) halmaza (lehet üres halmaz is). Minden* $f \in \mathcal{F}n$ *függvényjelnek meg kell adni az alakját. Azaz* $f^{(\pi_1,\pi_2,...,\pi_n \to \pi)}$ *ahol* $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n, \pi \in \mathcal{S}rt$ *típusok és* $n > 0$*. Ekkor* f*-t* n*-változós függvényszimbólumnak nevezzük.*

d.) $\mathcal{P}r$ *nem üres halmaz, az* Ω *nyelv predikátumszimbólumainak (predikátumbetűinek) halmaza. Minden* $P \in \mathcal{P}r$ *predikátumszimbólumhoz hozzárendeljük az alakját, azaz* $P^{(\pi_1,\pi_2,...,\pi_n)}$ *ahol* $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n \in \mathcal{S}rt$ *típusok és* $n \geq 0$*. Ekkor* P*-t* n*-változós predikátumszimbólumnak nevezzük. Ha* $n = 0$*, úgy a nullváltozós predikátumbetűt propozicionális betűnek is nevezzük.*

Példa: Elsőrendű logikai nyelvre

a.) A $\mathcal{G}eom$ nyelv:

$\mathcal{S}rt := \{pt, et, st\}$,

a *pt* típushoz tartozó változók: $A,\ B,\ C, ...$,

az *et* típushoz tartozó változók: $a,\ b,\ c, ...$,

az *st* típushoz tartozó változók: $\alpha,\ \beta,\ \gamma, ...$,

$\mathcal{C}nst := \emptyset$ (konstans nincs),

$\mathcal{F}n := \emptyset$ (függvényszimbólum nincs),

$\mathcal{P}r := \{P^{(pt,pt)}, Q^{(pt,et)}, R^{(pt,st)}\}$.

b.) Az $\mathcal{A}r$ nyelv:

$\mathcal{S}rt := \{szt\}$,

az *szt* típushoz tartozó változók: $x,\ y,\ z,\ ...$,

$\mathcal{C}nst := \{c\}$ (konstans a c),

$\mathcal{F}n := \{f^{(szt \to szt)}, g^{(szt,szt \to szt)}, h^{(szt,szt \to szt)}\}$,
$\mathcal{P}r := \{P^{(szt,szt)}\}$.

Példa: Fogalmazza meg a következő mondatot a $\mathcal{A}r$ nyelvben!
Egy szám pontosan akkor osztható 6-al, ha osztható 3-al és 2-vel is.
Megjegyzés: A példaként megadott nyelvekben még csak szimbólumaink vannak, a szimbólumokat majd jelentéssel fogjuk feltölteni (lásd a következő fejezetet, a nyelv interpretációját). Így az előző példa mondatát majd csak akkor tudjuk felírni a $\mathcal{A}r$ nyelvben.
Példa: logikai nyelvre

a.) nullad-rendű logikai nyelv (a kijelentéslogika nyelve)

$$\Omega =< \emptyset, \emptyset, \emptyset, \mathcal{P}r >$$

és minden $P \in \mathcal{P}r$ predikátumbetű propozicionális betű. (Tehát, nincsenek típusok, konstansok és függvényszimbólumok. Valamint minden predikátumbetű nullváltozós, azaz kijelentésváltozó.)

7.2. Definíció. *(Induktív definíció) az Ω **nyelv** π **típusú termjei**.*
Bázis:

a.) *Az Ω-nyelv minden π típusú változója π típusú term.*

b.) *Az Ω-nyelv minden π típusú konstansa π típusú term.*

Indukciós lépés:

c.) *Ha $f \in \mathcal{F}n$ és az f függvényszimbólum alakja $f^{(\pi_1,\pi_2,...,\pi_n \to \pi)}$ és t_i pedig π_i típusú termek $(i = 1, 2, ..., n)$ akkor*

$$f(t_1, t_2, ..., t_n)$$

π típusú term.

Megjegyzés: Minden term a következő két alak egyikét veszi fel.

A.) Az Ω nyelv konstansa vagy változója.

B.) Az indukciós lépés véges sokszori alkalmazásával nyert termek.

Példa: Az $\mathcal{A}r$ nyelv néhány termje:
$x, y, z, ...$
$f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), ..., f(y), f(f(y)), f(f(f(y))), ...$
$c, f(c), f(f(c)), f(f(f(c))), ...$
$g(x,x), g(x,y), g(x,z), ..., g(x, f(x)), g(x, f(y)), g(x, f(z)), ...$
$h(x,x), h(x,y), h(x,z), ..., h(x, f(x)), h(x, f(y)), h(x, f(z)), ...$
$h(g(x,y), g(c, f(c))), ...$
Az utóbbi term felépülése az induktív definícióval:

$h(g(x,y), g(c, f(c)))$

$g(c, f(c))$

$g(x,y)$ $f(c)$

Bázis: x y c c

Példa: A $\mathcal{G}eom$ nyelv termjei: $A, B, C, ..., a, b, c, ..., \alpha, \beta, \gamma, ...$
Nincs több term, mert nincs konstans, és nincsenek függvények.

7.3. Definíció. *(Az Ω nyelv atomi formulái) Ha a $P \in \mathcal{P}r$ predikátumbetű alakja $P^{(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)}$ és t_i pedig π_i típusú termek $(i = 1, 2, ..., n)$ akkor*

$$P(t_1, t_2, ..., t_n)$$

*kifejezést **atomi formulának** nevezzük.*
Speciálisan, ha P propozicionális betű, úgy atomi formula.

Példa: Az $\mathcal{A}r$ nyelv néhány atomi formulája:
$P(x, c), P(x, x), P(x, y), P(x, z), ...$
$P(x, f(c)), P(x, f(x)), P(x, f(y)), P(x, f(z)), ...$
$P(f(x), c), P(f(x), x), P(f(x), y), P(f(x), z), ...$
$P(g(x, y), h(x, c)), ...$
Példa: A $\mathcal{G}eom$ nyelv néhány atomi formulája:
$P(A, A), P(A, B), P(A, C), ..., P(B, A), P(B, B), P(B, C), ...$
$Q(A, a), Q(A, b), Q(A, c), ..., Q(B, a), Q(B, b), Q(B, c), ...$
$R(A, \alpha), R(A, \beta), R(A, \gamma), ..., R(B, \alpha), R(B, \beta), R(B, \gamma), ...$

Az Ω nyelv szimbólumai:
Logikai összekötőjelek:

jele	neve	jelentése
$\wedge$	konjunkció	,,és"
$\vee$	diszjunkció	,,vagy"
$\neg$	negáció	,,nem igaz, hogy ..."
$\supset$	implikáció	,,ha ..., akkor ..."

Kvantorok:

jele	neve	jelentése
$\forall$	univerzális kvantor	,,minden"
$\exists$	egzisztenciális kvantor	,,létezik"

7.4. Definíció. *(Induktív definíció) az Ω **nyelv formulái**.*
Bázis:

a.) Minden atomi formula az Ω nyelv formulája.

Indukciós lépés:

b.) Ha A és B az Ω nyelv formulája, akkor

$$(A \wedge B),\ (A \vee B),\ (A \supset B),\ \neg A$$

is az Ω nyelv formulája.

c.) Ha A formula és x tetszőleges változó az Ω nyelvben, akkor a

$$\forall x A,\ \exists x A$$

kifejezések szintén formulák az Ω nyelvben.

Megjegyzés: Minden formula a következő két alak egyikét veszi fel.

A.) Az Ω nyelv atomi formulája.

B.) Az indukciós lépés véges sokszori alkalmazásával nyert formulák.

Példa: Formula-e az $\mathcal{A}r$ nyelvben?

$(P(x,c) \supset P(c,f(c))$ (Nem, zárójel párja hiányzik.)

$(P(x,c) \supset P(c,f(c))) \wedge \exists x$ (Nem, mert a kvantor után formulát kell írni, az hiányzik.)

$\exists x P(x)$ (Nem, mert A kétváltozós predikátumbetű.)

$\exists P(x,x)$ (Nem, mert a kvantornak nincs változója.)

$\exists x, y P(x,x)$ (Nem, mert a kvantornak csak egy változója lehet.)

$(P(x,c) \supset P(c,f(c))) \wedge \exists x P(x,f(c))$ (Nem, külső zárójel hiányzik. Megállapodás szerint viszont formula lesz, ha kirakjuk a külső zárójeleket.)

Ez utóbbi azért formula, mert felépíthető az induktív definícióval.

Építsük fel az induktív definícióval!

$$((P(x,c) \supset P(c,f(c))) \wedge \exists x P(x,f(c)))$$

$$(P(x,c) \supset P(c,f(c))) \qquad\qquad \exists x P(x,f(c))$$

Bázis: $P(x,c)$ $\qquad P(c,f(c))$ $\qquad P(x,f(c))$

7.5. Definíció. *A termek és a formulák az Ω nyelv kifejezései.*

Az A formula minden olyan részét, amely maga is formula az A formula ***részformulájának*** *nevezzük.*

A t term minden olyan részét, amely maga is term a t term ***résztermjének*** *nevezzük.*

Példa: $\forall x(A(x) \wedge \neg\exists y B(y))$ formula részformulái:

$$A(x),\ B(y),\ \exists y B(y),\ \neg\exists y B(y),\ (A(x) \wedge \neg\exists y B(y)),\ \forall x(A(x) \wedge \neg\exists y B(y))$$

Más jelsorozatok nem részformulák.

7.6. Definíció. *(szemantikai definíció) Egy A formulában szereplő logikai szimbólumok számát* ***logikai összetettségnek*** *nevezzük és $l(A)$-val jelöljük. Minden atomi formula logikai összetettsége 0.*

Egy t termben szereplő függvényszimbólumok számát a t term ***funkcionális összetettségnek*** *nevezzük és $\tilde{l}(t)$-vel jelöljük. Minden konstans, változó funkcionális összetettsége 0.*

Megjegyzés: A logikai összetettség, s a funkcionális összetettség fogalma induktív definícióval is megadható. (Lásd előadás.)

Megállapodások rövidítésekről:

- Használjuk a kijelentés logika rövidítéseit.

- a logikai jelek prioritása növekvő sorrendben:

$$\equiv \quad \supset \quad \begin{matrix} \wedge \\ \\ \vee \end{matrix} \quad \neg \quad \begin{matrix} \forall \\ \\ \exists \end{matrix}$$

Példa: Motivációs feladat: $S(x,y)$ kétváltozós predikátumbetű, jelentése: x szereti y-t. Mit jelentenek a következő mondatok?

$\forall x \exists y S(x,y)$ - Mindenki szeret valakit (kijelentés, zárt mondat).
$\forall z \exists y S(z,y)$ - Mindenki szeret valakit (kijelentés, zárt mondat).
$\forall x S(x,y)$ - Mindenki szereti y-t (nyitott mondat, egyváltozós).
$\exists y S(x,y)$ - Az x szeret valakit (nyitott mondat, de egyváltozós).
$S(x,y)$ - x szereti y-t (nyitott mondat, kétváltozós)
Mi történt itt? Ezt a kérdést szeretnénk a következőekben megválaszolni.

7.7. Definíció. *A $\forall xA$, $\exists xA$ formulákban a $\forall x$, $\exists x$ jelsorozatot **kvantoros előtagnak**, az x változót a **kvantoros előtag változójának**, az A formulát a **kvantoros előtag hatáskörének** nevezzük.*

7.8. Definíció. *(szemantikai definíció) Azt mondjuk, hogy egy változó egy formulában **kötött előfordulású**, ha szerepel egy rajta ható kvantor hatáskörében. Egy változó valamely előfordulását egy formulában **szabadnak** nevezzük, ha nem kötött.*

Egy változó a formula paramétere (szabad változója), ha van legalább egy szabad előfordulása.

Jelölés: $\mathcal{F}v(A)$ az A formula szabad változóinak halmaza.

Megjegyzés: A változó kötött és szabad előfordulása fogalom induktív definícióval is megadható. (Lásd előadás.)

Egy változó egy formulában több helyen is szerepelhet, egyes előfordulások szabadok, más előfordulások pedig kötöttek lesznek.
Példa: A $\forall x(P(x) \vee Q(y))$ formulában a $\forall x$ kvantoros előtag hatásköre a $(P(x) \vee Q(y))$ részformula, így x előfordulása kötött lesz, míg y előfordulása szabad lesz.

7.9. Definíció. *Az Ω nyelv szabad változót tartalmazó formuláit **nyitott formuláknak**, szabad változót nem tartalmazó formuláit **zárt formuláknak, mondatoknak** nevezzük.*

7.10. Definíció. *Ha egy formulában egy változó kötött, akkor át lehet jelölni, ha az átjelölés után egyetlen részformula szabad változója sem válik kötötté. Ilyenkor **szabályosan végrehajtott kötött változó átjelölésről** beszélünk.*

Ha az A és az A' formulák csak szabályosan végrehajtott kötött változó átjelölésben különböznek egymástól, akkor ***kongruens formuláknak*** *nevezzük őket, ill. azt is mondjuk, hogy A* ***az A' variánsa****.*

Jelőlés: $A \approx A'$.

Példa: A $\forall x(P(x) \vee Q(y))$ formula kötött változó átjelölései (vegyük észre, hogy x kötött változó és y szabad változó, így csak x-t tudjuk átjelölni):

a.) $\forall y(P(y) \vee Q(y))$ nem szabályosan végrehajtott kötött változó átjelölés (y változó szabad volt, s kötött lett, így most y mindkét előfordulása kötött).

b.) $\forall z(P(z) \vee Q(y))$ szabályosan végrehajtott kötött változó átjelölés. (Vegyük észre, hogy y változó szabad maradt!)

7.11. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy formula* ***változó-tiszta****, ha benne a kvantorok különböző változókat kötnek meg és a kötött változók különböznek a szabad változóktól.*

Példa: Az előbbi $\forall x(P(x) \vee Q(y))$ formula változó-tiszta, de az átjelöléssel kapott $\forall z(P(z) \vee Q(y))$ formula is az.
Megjegyzés: Szabályosan végrehajtott kötött változó átjelöléssel minding tudunk változó-tiszta alakot kapni.

7.12. Definíció. *A* ***formális helyettesítést*** *megadhatjuk táblázattal*

$$\Theta := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ t_1 & t_2 & ... & t_n \end{pmatrix},$$

ahol a felső sorban változók, az alsó sorban termek szerepelnek. A Θ helyettesítés során az x_i változóba helyettesítjük a t_i termet.

A Θ helyettesítés értelmezési tartománya: $\mathcal{D}om\ \Theta := \{x_1, x_2, ..., x_n\}$,
a Θ helyettesítés értékkészlete: $\mathcal{R}ng\ \Theta := \{t_1, t_2, ..., t_n\}$.

Megjegyzés: A formális helyettesítést induktív definícióval adjuk meg (lásd előadás).

Fontos, hogy csak szabad változóba helyettesíthetünk.

7.13. Definíció. *A Θ helyettesítés* ***megengedett*** *a K kifejezés számára, ha a helyettesítés után a helyettesített termek egyetlen szabad változója sem válik kötötté.*

Ha az A formula esetén egy helyettesítés nem megengedett, akkor az A formula valamely A' variánsával megengedetté tehető. Ekkor ***szabályos helyettesítésről*** *beszélünk. Jelölés: $[A\Theta]$.*

Példa: A következő helyettesítés megengedett-e? Ha nem akkor végezzen szabályos helyettesítést!

$$(\forall x A(x,y) \wedge B(x)) \begin{pmatrix} x & y \\ f(x,y) & g(x,z) \end{pmatrix}$$

Az x első előfordulása kötött így oda nem helyettesítek, y-ba és x második előfordulásába helyettesítem a megadott termeket. Látható, hogy ha y-ba behelyettesítem a $g(x,z)$ termet, akkor annak az x változója kötötté válik, mert az univerzális kvantor megköti. Tehát a megadott helyettesítés nem megengedett.

Szabályos helyettesítést hajtunk végre, ennek során az x kötött változót átjelöljük w változóra, majd ezután helyettesítünk.

$$(\forall w A(w,y) \wedge B(x)) \begin{pmatrix} x & y \\ f(x,y) & g(x,z) \end{pmatrix} \sim (\forall w A(w, g(x,z)) \wedge B(f(x,y)))\,.$$

8. A nyelv szemantikája

8.1. Definíció. *Adott egy Ω elsőrendű nyelv. Az Ω* ***nyelv hordozója*** *egy olyan $\mathcal{D}$ függvény, amely minden $\pi \in \mathcal{S}rt$ típushoz hozzárendel egy nem üres $\mathcal{D}_\pi$ halmazt, melyet a π típus* ***objektum tartományának*** *nevezünk. ($\mathcal{D}_\pi$ nem más mint a π-típusú változók lehetséges értékeinek a halmaza, azaz a π típusú ,,objektumok" halmaza.)*

8.2. Definíció. *Az Ω elsőrendű nyelv I* ***interpretációja (modellje)*** *az $I := < \mathcal{D}, \hat{\mathcal{C}nst}, \hat{\mathcal{F}n}, \hat{\mathcal{P}r} >$ négyes, amely teljesíti a következőket:*

a.) $\mathcal{D}\colon \pi \mapsto \mathcal{D}_\pi$, tehát a nyelv hordozója $\mathcal{D}$, minden π típushoz hozzárendeli az objektum tartományát $\mathcal{D}_\pi$-t.

b.) $\hat{\mathcal{C}nst}\colon c \mapsto \hat{c}$, azaz minden $c \in \mathcal{C}nst$ π típusú konstansnak megfeleltet egy $\hat{c} \in \mathcal{D}_\pi$ π típusú objektumot.

c.) $\hat{\mathcal{F}n}\colon f \mapsto \hat{f}$, azaz minden $f \in \mathcal{F}n$ függvényszimbólumnak egy konkrét $\hat{f}$ függvényt feleltet meg. Azaz, ha az f alakja $f^{(\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n \to \pi)}$ úgy

$$\hat{f}\colon \mathcal{D}_{\pi_1} \times \mathcal{D}_{\pi_2} \times \ldots \times \mathcal{D}_{\pi_n} \to \mathcal{D}_\pi$$

alakú konkrét függvény.

d.) $\hat{\mathcal{P}r}\colon P \mapsto \hat{P}$, azaz minden $P \in \mathcal{P}r$ predikátumszimbólumnak egy konkrét $\hat{P}$ predikátumot feleltet meg. Azaz, ha az P alakja $P^{(\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n)}$ úgy

$$\hat{P}\colon \mathcal{D}_{\pi_1} \times \mathcal{D}_{\pi_2} \times \ldots \times \mathcal{D}_{\pi_n} \to \{0, 1\}$$

alakú konkrét függvény. Ha P propozicionális betű, akkor $\hat{P}$ vagy 0 vagy 1.

Megjegyzés: A nyelv modellje vagy interpretációja a nyelv szimbólumait (jeleit) valódi tartalommal (jelentéssel) tölti fel.

A 0, 1 szimbólumokat **logikai értékeknek** nevezzük, használjuk még a **hamis, igaz** elnevezéseket is.
Példa:

a.) A $\mathcal{G}eom$ nyelv modellje (a szimbólumokat jelentéssel töltjük fel):

a nyelv hordozójának $\mathcal{D}$-nek a megadása:

$\mathcal{D}_{pt} \rightleftharpoons$ a tér pontjainak halmaza,

$\mathcal{D}_{et} \rightleftharpoons$ a tér egyeneseinek halmaza,

$\mathcal{D}_{st} \rightleftharpoons$ a tér síkjainak halmaza.

$\hat{\mathcal{C}nst}$, $\hat{\mathcal{F}n}$ nincs, mert $\mathcal{C}nst = \mathcal{F}n = \emptyset$ volt.

$\hat{\mathcal{P}r}$ megadása:

$\hat{P}(A, B) \rightleftharpoons (A = B)$ azaz az A pont egyenlő a B ponttal,

$\hat{Q}(A, e) \rightleftharpoons (A \in e)$ azaz az A pont az e egyenesen van,

$\hat{R}(A, \alpha) \rightleftharpoons (A \in \alpha)$ azaz az A pont az α síkon van.

b.) A $\mathcal{A}r$ nyelv $\mathbb{N}$ modellje:

a nyelv hordozójának $\mathcal{D}$-nek a megadása:

$\mathcal{D}_{szt} \rightleftharpoons \mathbb{N}$ a természetes számok halmaza,

$\hat{\mathcal{C}nst}$ megadása:

$\hat{c} \rightleftharpoons 0 \in \mathbb{N}$ a nulla természetes szám, melyet egyszerűen csak 0-val is szoktunk jelölni (a 0 szimbólumhoz gyermekkorunkban hozzárendelték a nulla számot).

$\hat{\mathcal{F}n}$ megadása:

$\hat{f}(x) \rightleftharpoons Sx$ azaz az x rákövetkezője „$x + 1$" (de ez csak idézőjelben, mert 1 sincs csak $S0$),

$\hat{g}(x, y) \rightleftharpoons x + y$,

$\hat{h}(x, y) \rightleftharpoons x \cdot y$.

$\hat{\mathcal{P}r}$ megadása:

$\hat{P}(x, y) \rightleftharpoons (x = y)$ azaz az x természetes szám egyenlő az y természetes számmal.

Megjegyzés: Az $\mathcal{A}r$ nyelvnek más modellje is van például a $\mathcal{D}_{szt} \rightleftharpoons \mathbb{Z}($ vagy $\mathbb{R})$-t is írhattunk volna.

8.3. Definíció. *$\mathcal{C}nst(D) \rightleftharpoons \mathcal{C}nst \bigcup (\cup_{\pi \in \mathcal{S}rt} \mathcal{D}_\pi)$ segítségével új nyelv adható meg, ez*

$$\Omega(\mathcal{D}) \rightleftharpoons < \mathcal{S}rt,\ \mathcal{C}nst(D),\ Fn,\ Pr > .$$

Megjegyzés: Az $\Omega(\mathcal{D})$ az Ω-tól, csak új konstansok jelenlétében különbözik. Például az $\mathcal{A}r$ nyelvben most már leírhatjuk azt, hogy 2, eddig csak azt írhattuk le, hogy $SS0$.

Motivációs feladat: Tekintsük az $\mathcal{A}r$ nyelv $\mathbb{N}$ interpretációját. Milyen objektum lesz a $\mathcal{D}_{szt} = \mathbb{N}$-ben a következő term.

a.) $(SSSS0 + SS0) \cdot SS0$

Ez a term a 12 természetes számot jelöli.

b.) $SSSS0 + x$

A $4 + x$ nem jelöl természetes számot (nem objektum a $\mathcal{D}_{szt}$-ben).

8.4. Definíció. *(Induktív definíció) az Ω **nyelv értékelt termjei**. Legyen adott az Ω nyelv egy I interpretációja, a t term I-beli értékét jelölje $|t|_I$. Ha a t típusa π, úgy $|t|_I$ a $\mathcal{D}_\pi$ objektum tartomány egy objektuma.*

Bázis:

a.) Ha $c \in Cnst$, úgy $|c|_I \rightleftharpoons \hat{c}$.

b.) Ha $a \in \mathcal{D}_\pi$, úgy $|a|_I \rightleftharpoons a$.

Indukciós lépés:

c.) Ha a term alakja $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ ahol a $t_1, t_2, ..., t_n$ már értékelt termek, a $|t_1|_I, |t_2|_I, ..., |t_n|_I$ értékekkel, úgy

$$|f(t_1, t_2, ..., t_n)|_I \rightleftharpoons \hat{f}(|t_1|_I, |t_2|_I, ..., |t_n|_I).$$

Példa: Korábban felépítettük az $\mathcal{A}r$ nyelvben a $h(g(x, y), g(c, f(c)))$ termet. Mi a jelentése az $\mathcal{A}r$ nyelv $\mathbb{N}$ interpretációjában?

$$\begin{array}{lcccc}
 & & (x+y)(0+S0) & & \\
 & & & (0+S0) & \\
 & (x+y) & & & S0 \\
\text{Bázis: } x & & y & 0 & 0
\end{array}$$

Megjegyzés: Változót tartalmazó termet nem lehet értékelni. Az előző példánkban is ez történik $(0 + S0)$ értéke 1, de $(x + y)$-nak nincs értéke, így a termnek sincs értéke.

Motivációs feladat: Tekintsük az $\mathcal{A}r$ nyelv $\mathbb{N}$ interpretációját. Mi lesz a következő formulák logikai értéke?

a.) $\exists x((x + SS0) = SSSS0)$

b.) $\exists x((x + SSSS0) = SS0)$

c.) $((x + SS0) = SSSS0)$

d.) Az $SSSSS0$ szám páros.

Az a.) formula igaz, a b.) formula hamis, a c.) formulának nincs logikai értéke, a d.) formula hamis. Vegyük észre, hogy a c.) formula nyitott mondat, az a.) b.) d.) formulák zárt mondatok, ez utóbbiaknak tudtuk megmondani a logikai értékét.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a formula logikai értéke függ az interpretációtól. Az $\mathcal{A}r$ nyelv $\mathbb{Z}$ interpretációjában a b.) mondat igaz lesz, míg a $\mathbb{N}$ interpretációban hamis volt.

8.5. Definíció. *(Induktív definíció) az Ω* ***nyelv értékelt formulái****. Legyen adott az Ω nyelv egy I interpretációja. Ha az A az I-ben értékelt formula akkor értékét $|A|_I$-vel jelöljük ($|A|_I = 1$ vagy $|A|_I = 0$). Az $|A|_I = 1$-t $I \models A$-val is jelöljük.*

Bázis:

a.) *Ha az A formula atomi formula, azaz $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ alakú, ahol a $t_1, t_2, ..., t_n$ már értékelt termek, a $|t_1|_I, |t_2|_I, ..., |t_n|_I$ értékekkel, úgy*

$$|P(t_1, t_2, ..., t_n)|_I \rightleftharpoons \hat{P}(|t_1|_I, |t_2|_I, ..., |t_n|_I).$$

Valamint, $\hat{P}(|t_1|_I, |t_2|_I, ..., |t_n|_I) = 1$ esetén azt mondjuk, hogy az atomi formula igaz I-ben, ellenkező esetben ($\hat{P}(|t_1|_I, |t_2|_I, ..., |t_n|_I) = 0$) azt mondjuk, hogy az atomi formula hamis I-ben.

Indukciós lépés:

b.) $|A \wedge B|_I = 1$ *pontosan akkor, ha $|A|_I = 1$ és $|B|_I = 1$ egyszerre teljesül.*

c.) $|A \vee B|_I = 1$ *pontosan akkor, ha $|A|_I = 1$ vagy $|B|_I = 1$ közül legalább az egyik teljesül.*

d.) $|A \supset B|_I = 0$ *pontosan akkor, ha $|A|_I = 1$ és $|B|_I = 0$ egyszerre teljesül,*

e.) $|\neg A|_I = 1$ *pontosan akkor, ha $|A|_I = 0$,*

f.) $|\forall x A|_I = 1$ *(ahol x π típusú változó) pontosan akkor, ha minden $a \in \mathcal{D}_\pi$ esetén $\left| A \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} \right|_I = 1$,*

g.) $|\exists x A|_I = 1$ *(ahol x π típusú változó) pontosan akkor, ha van olyan $a \in \mathcal{D}_\pi$, hogy $\left| A \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} \right|_I = 1$.*

Megjegyzés:

a.) Nyitott mondatot nem értékelünk.

b.) Az induktív definícióban meghatározott logikai értékek összhangban vannak a korábban tanultakkal. Lásd a *Kijelentés logika* és *Predikátum logika* című fejezeteket!

9. Logikai törvények

9.1. Definíció. *Az Ω nyelv egy A formulája logikai törvény vagy azonosan igaz formula, vagy tautológia, ha A igaz az Ω nyelv minden interpretációjában, minden értékelés esetén.*

Jelölés: $\models A$.

Az A formula logikailag ellentmondásos, vagy kontradikció, ha minden interpretációban, minden értékelés esetén hamis.

Az A formula kielégíthető, ha van olyan I modell és abban olyan értékelés, amelynél A igaz.

Az A és B formulák logikailag ekvivalensek, ha az $(A \equiv B)$ formula logikai törvény.

Jelölés: $A \sim B$.

9.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az Ω nyelv A formulája az $A_1, A_2, ..., A_k$ Ω-beli formulák Boole-kombinációja, ha az A formula az $A_1, A_2, ..., A_k$ formulákból épül fel a $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\neg$ logikai jelek segítségével, kvantorok alkalmazása nélkül (azonban $A_1, A_2, ..., A_k$-ban szerepelhetnek kvantorok).*

Megjegyzés:

- Az $A_1, ..., A_k$ formulák tartalmazhatnak kvantorokat.
- A kijelentéslogika minden formulája Boole-kombináció.
- Az $A_1, ..., A_k$ komponensek logikai értéke egyértelműen meghatározza a Boole-kombináció logikai értékét, ezt a formula Quine-féle táblázatából is le lehet olvasni. Az $A_1, A_2, ..., A_k$ formulák alatt kiírjuk a 0 és 1 összes lehetséges kombinációját, ez 2^k sor. Ez után sorra elvégezzük a logikai műveleteket.

Példa: $\forall x A(x) \vee \exists y B(y)$ formula Boole-kombináció, melynek komponensei: $\forall x A(x)$, $\exists y B(y)$.

9.3. Definíció. *Az olyan Boole-kombinációt, amelyhez tartozó Quine-féle táblázatban a főoszlop csupa egyesekből áll propozícionális tautológiának nevezzük.*

9.1. Lemma. *Ha egy Boole-kombináció propozícionális tautológia, akkor logikai törvény.*

Megjegyzés: A fentiek összhangban vannak a korábban tanultakkal, a kijelentéslogika törvényei Boole-kombinációk, sőt propozicionális tautológiák. Így most is logikai törvények lesznek.

További logikai törvények:

Jelölés: A továbbiakban $A(x)$, $A(x,y)$ azt jelöli, hogy az x ill. y felléphet A-beli szabad változóként, de nem feltétlenül az.

Egynemű kvantorok cseréje:

45.) $\forall x \forall y A(x,y) \sim \forall y \forall x A(x,y)$,

46.) $\exists x \exists y A(x,y) \sim \exists y \exists x A(x,y)$.

Kvantor-csere implikációban:

47.) $\models \forall x A(x) \supset \exists x A(x)$,

48.) $\models \exists y \forall x A(x,y) \supset \forall x \exists y A(x,y)$.

De Morgan-féle kvantoros törvények:

49.) $\neg \forall x A(x) \sim \exists x \neg A(x)$,

50.) $\neg \exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$.

Kvantor kifejezése másik kvantorral:

51.) $\forall x A(x) \sim \neg \exists x \neg A(x)$,

52.) $\exists x A(x) \sim \neg \forall x \neg A(x)$.

Kvantorok egyoldali kiemelése (itt x nem szabad változó A-ban):

53.) $(A \wedge \forall x B(x)) \sim \forall x (A \wedge B(x))$,

54.) $(A \vee \forall x B(x)) \sim \forall x (A \vee B(x))$,

55.) $(A \wedge \exists x B(x)) \sim \exists x (A \wedge B(x))$,

56.) $(A \vee \exists x B(x)) \sim \exists x (A \vee B(x))$,

57.) $(A \supset \forall x B(x)) \sim \forall x (A \supset B(x))$,

58.) $(A \supset \exists x B(x)) \sim \exists x (A \supset B(x))$,

59.) $(\forall x B(x) \supset A) \sim \exists x (B(x) \supset A)$,

60.) $(\exists x B(x) \supset A) \sim \forall x (B(x) \supset A)$.

Kvantorok kétoldali kiemelése:

61.) $(\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)) \sim \forall x (A(x) \wedge B(x))$,

62.) $(\exists x A(x) \vee \exists x B(x)) \sim \exists x (A(x) \vee B(x))$,

63.) $\models (\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \supset \forall x (A(x) \vee B(x))$,

64.) $\models \exists x (A(x) \wedge B(x)) \supset (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x))$.

Fiktív kvantorok törvénye (x nem szabad változó az A-ban):

65.) $\forall x A \sim A$,

66.) $\exists x A \sim A$.

Kongruens formulák ekvivalenciája:

67.) Ha $A \approx B$ akkor $A \sim B$.

Helyettesítéskor fellépő kvantorok:

68.) $\models \forall x A \supset A \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$,

69.) $\models A \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \supset \exists x A$.

Kvantor-hatáskör átjelölés (x, y azonos típusú változó, y nem szabad változó A-ban):

70.) $\forall x A \sim \forall y A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

71.) $\exists x A \sim \exists y A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Kvantor-redukció (x, y azonos típusu változó):

72.) $\models \forall x \forall y A(x, y) \supset \forall x A(x, x)$,

73.) $\models \exists x A(x, x) \supset \exists x \exists y A(x, y)$.

Helyettesítés ekvivalens formulákban:

74.) Ha $A \sim B$, akkor $A \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \sim B \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$.

Megjegyzés:

a.) $\forall x A(x) \supset \exists x A(x)$ formula Boole-kombináció, komponensei $\forall x A(x)$, $\exists x A(x)$. Értéktáblázata:

$\forall x A(x)$	$\exists x A(x)$	$\forall x A(x) \supset \exists x A(x)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

A Boole-kombináció nem propozicionális tautológia (lásd 2. sor az értéktáblázatban), pedig logikai törvény. Az értéktáblázat nem veszi figyelembe a formula finom szerkezetét (jelentését).

Nevezetesen $|\forall x A(x)|_I = 1$ és $|\exists x A(x)|_I = 0$ egyszerre nem állhat fenn.

b.) Ha kvantort tartalmazó formula értéktáblázatának főoszlopában csupa 1 áll, akkor propozicionális tautológia, tehát logikai törvény. Ha a főoszlop 0-t is tartalmaz, akkor nem tudunk nyilatkozni, a formula lehet logikai törvény és nem logikai törvény is.

c.) Sokkal egyszerűbb egy formuláról megmutatni, hogy nem logikai törvény. Elég megadni egy I interpretációt és egy értékelést, amikor a formula hamis lesz.

Példa: Mutassuk meg, hogy a $\forall x A(x) \supset \exists x A(x)$ formula logikai törvény!

Meg kell mutatnunk, hogy minden modellben és benne minden értékelésnél igaz lesz.

Rögzítsünk egy tetszőleges I interpretációt. Ekkor két lehetőség van $|\forall x A(x)|_I = 0$ vagy $|\forall x A(x)|_I = 1$. Tárgyaljuk ezt a két esetet!

a. $|\forall x A(x)|_I = 0$ ebben az esetben $\exists x A(x)$ logikai értékétől függetlenül

$$|\forall x A(x) \supset \exists x A(x)|_I = 1$$

az implikáció értelmezése miatt.

b. $|\forall x A(x)|_I = 1$, azaz (feltéve, hogy x az π típusú változó) minden $a \in \mathcal{D}_\pi$ objektum esetén $\left| A \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} \right|_I = 1$. A sok a objektumból egy a'-t kiválasztva, tudjuk mondani, hogy $\left| A \begin{pmatrix} x \\ a' \end{pmatrix} \right|_I = 1$. Ebből van olyan a

objektum amelyre $\left|A\begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix}\right|_I = 1$ (mert a' ilyen). Tehát $|\exists x A(x))|_I = 1$. Amiből

$$|\forall x A(x) \supset \exists x A(x)|_I = 1$$

azonnal adódik.

Mivel az I interpretáció tetszőleges volt, így kijelenthetjük, hogy minden I interpretációban végigvihető a fenti gondolatmenet.

Példa: Mutassuk meg, hogy a $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \supset \exists x(A(x) \wedge B(x))$ formula nem logikai törvény (használjuk a c.) megjegyzést)!

Megadunk egy I interpretációt, amelyben a formula hamis lesz.

I megadása: $\mathcal{A}r$ nyelv $\mathbb{N}$ interpretáció.

$A(x) \rightleftharpoons (SS0|x)$, tehát x páros szám, $B(x) \rightleftharpoons \neg(SS0|x)$, tehát x páratlan szám.

Ekkor $|\exists x A(x)|_I = 1$, $|\exists x B(x)|_I = 1$ és $|\exists x(A(x) \wedge B(x))|_I = 0$, így $|\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \supset \exists x(A(x) \wedge B(x))|_I = 0$.

Példa: Mutassuk meg, hogy a $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \supset \exists x(A(x) \wedge B(x))$ formula kielégíthető formula!

Megadunk egy olyan I interpretációt és benne olyan értékelést, amelyben a formula igaz lesz.

I megadása: $\mathcal{A}r$ nyelv $\mathbb{N}$ interpretáció.

$A(x) \rightleftharpoons (SSS0|x)$, tehát x osztható 3-al, $B(x) \rightleftharpoons (SS0|x)$, tehát x osztható 2-vel.

Ekkor $|\exists x A(x)|_I = 1$ (hiszen a 3, 6, 9, ... osztható 3-al), $|\exists x B(x)|_I = 1$ (hiszen a 2, 4, 6, ... osztható 2-vel) és $|\exists x(A(x) \wedge B(x))|_I = 1$, (a 6 olyan szám, amely osztható 3-al és 2-vel) így $|\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \supset \exists x(A(x) \wedge B(x))|_I = 1$.

10. Logikai törvények alkalmazása 2: prenex alak.

Megjegyzés: Korábban a logikai törvényeket diszjunktív normálformára és konjunktív normálformára hozásnál használtuk. A diszjunktív normálforma és konjunktív normálforma definíciójában a literál az atomi formula vagy a negáltja lesz az Ω nyelvben. Így a korábbi lemmánk a következő alakban lesz érvényes az Ω nyelvben.

10.1. Lemma. *Az Ω nyelv minden kvantormentes formulája konjunktív normálformára ill. diszjunktív normálformára hozható, azaz logikailag ekvivalens valamely konjunktív normálformával ill. diszjunktív normálformával.*

Megjegyzés: Hasonlóan a kijelentés logikában megadott logikai következmény fogalmat meg adhatjuk kvantort tartalmazó formulákra is. A definíció a következő lesz.

10.1. Definíció. *Jelölje Γ az Ω nyelv véges sok formulájának a halmazát, A pedig az Ω nyelv egy formuláját. Azt mondjuk, hogy A logikai következménye (szemantikai következménye) a Γ-beli formuláknak (jelölés: $\Gamma \models A$), ha az Ω nyelv minden I interpretációja, valamint az A és a Γ-beli formulák minden olyan értékelése esetén, amikor az Γ-beli formulák mindegyike igaz I-ben, akkor az A is igaz I-ben. Ha a Γ a $B_1, B_2, ..., B_n$ formulákból áll, úgy ezeket premisszáknak (feltételeknek), az A-t konklúziónak (zárótételnek) nevezzük.*

10.2. Definíció. *Az Ω nyelv egy $Q_1x_1Q_2x_2...Q_nx_nA$ alakú formuláját, ahol $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ kvantorok ($n \geq 0$) és A kvantormentes formula, prenex formulának nevezzük.*

Speciálisan a kvantormentes formula is prenex formula (lásd $n = 0$).

10.1. Tétel. *Minden A formula prenex alakra hozható, azaz van olyan prenex formula, amellyel A logikailag ekvivalens.*

Bizonyítás: Algoritmust adunk meg, amellyel mindig prenex alakot kapunk.

1.) A formulát változó-tiszta alakra hozzuk.

2.) A kvantoros de Morgan törvényeket és a kvantorok egyoldali kiemelése törvényeket többször egymás után alkalmazva prenex formulát kapunk.

Megjegyzés: A kvantorok kiemelésének sorrendje változtatható, így a prenex alak kvantoros előtagja (prefixum) függ az átalakítás módjától.
Példa: Hozza prenex alakra a $\neg\exists x\forall y P(x,y) \supset \exists x\forall y Q(x,y)$ formulát! Alkalmazzuk az algoritmust, figyeljünk a hiányzó zárójelekre!

$$\begin{aligned}
\neg\exists x\forall y P(x,y) \supset \exists x\forall y Q(x,y) &\sim (\neg\exists x\forall y P(x,y) \supset \exists z\forall w Q(z,w)) \\
&\sim (\forall x\exists y\neg P(x,y) \supset \exists z\forall w Q(z,w)) \\
&\sim \exists z\forall w(\forall x\exists y\neg P(x,y) \supset Q(z,w)) \\
&\sim \exists z\forall w\exists x\forall y(\neg P(x,y) \supset Q(z,w)).
\end{aligned}$$

Előbb hiányzó zárójelek, majd változó-tiszta alak szabályosan végrehajtott kötött változó átjelöléssel, majd kvantoros de Morgan törvények (52, 51 sorrendben), majd kvantorok egyoldali kiemelése (60, 59, 61, 62 sorrendben).

11. Predikátumkalkulus

Bevezetés: A szintaktikailag felépített logikai rendszereket logikai kalkulusoknak is nevezzük, azaz logikai kalkulus nem más mint olyan formális rendszer, formális eljárás (szabályok gyűjteménye) melyek segítségével logikai törvényeket kapunk. Egy logikai kalkulus kiinduló *axiómákból és levezetési szabályokból* áll.

11.1. Definíció. *Rögzítsünk egy* Ω *elsőrendű nyelvet, a* ***predikátumkalkulus axiómái*** *a következők:*

1.) $A \supset (B \supset A)$

2.) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

3.) $A \supset (B \supset (A \wedge B))$

4.) $(A \wedge B) \supset A$

5.) $(A \wedge B) \supset B$

6.) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$

7.) $A \supset (A \vee B)$

8.) $B \supset (A \vee B)$

9.) $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

10.) $\neg\neg A \supset A$

11.) $\forall x A \supset \left[A \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \right]$*, x változó t vele azonos típusú term,*

12.) $\forall x(C \supset A(x)) \supset (C \supset \forall x A(x))$*, ahol x nem paraméter a C-ben,*

13.) $\left[A \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \right] \supset \exists x A$*, x változó t vele azonos típusú term,*

14.) $\forall x(A(x) \supset C) \supset (\exists x A(x) \supset C)$*, ahol x nem paraméter a C-ben.*

Megjegyzés:

1.) A predikátumkalkulus minden axiómája logikai törvény.

2.) $\left[A \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \right]$ helyett szoktunk egyszerűen csak $A(t)$-t írni.

A Predikátumkalkulus **levezetési szabályai:** A, B tetszőleges formula, x tetszőleges változó.

Modus ponens szabály:

$$\frac{A,\ A \supset B}{B}$$

Általánosítás szabálya:

$$\frac{A}{\forall x A}$$

Megjegyzés: Bármely logikai törvény megkapható, ,,levezethető" az 1-14 axiómákból a megadott levezetési szabályokkal. Mit jelent az, hogy levezethető?

11.2. Definíció. *Legyen Γ az Ω nyelvbeli formulák tetszőleges véges halmaza (lehet üreshalmaz is), azaz $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$, B pedig egy formula. Azt mondjuk, hogy a Γ formulahalmazból a B formula **levezethető a predikátumkalkulusban,** ha megadható egy $D_1, ..., D_m$ formulasorozat ($m \geq 1$), ahol $D_m = B$ és a $D_1, ..., D_{m-1}$ sorozat tagjai*

a.) vagy a predikátumkalkulus axiómái,

b.) vagy Γ-beli formulák, azaz hipotézisek (nyílt premisszák),

c.) vagy a megelőző tagokból adódnak a levezetési szabályok alkalmazásával. Fontos, hogy ha a $\forall xC$ formulát a C formulából nyerjük az általánosítás szabályával, akkor teljesülnie kell a struktúra feltételnek (struktúra feltétel: x nem lehet szabad változó egyik olyan hipotézisben sem, azaz Γ-beli formulában sem, amely megelőzi a C tekintett előfordulását.).

Jelölés: $\Gamma \vdash B$.

11.3. Definíció. *Legyen B az Ω nyelv egy formulája. A B-t a **predikátumkalkulus levezethető formulájának** nevezzük, ha van hipotézis mentes levezetése, azaz levezethető a $\Gamma = \emptyset$ halmazból.*

Jelölés: $\vdash B$.

11.4. Definíció. *A $\Gamma \vdash A$ alakzatot **szekvenciának** nevezzük. A $\Gamma \vdash A$ **szekvencia megalapozása** alatt olyan levezetés megkonstruálását értjük, amelyben A alsó formula és minden hipotézis Γ-beli.*

11.1. Tétel (Dedukció tétel). *Legyen Γ egy tetszőleges véges formula halmaz, A, B formulák.*
$\Gamma, A \vdash B$ *pontosan akkor, ha* $\Gamma \vdash A \supset B$.

11.5. Definíció. *Ha $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma \models A$ is teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a* ***kalkulus helyes*** *a szemantikus rendszerre nézve.*
Ha $\Gamma \models A$, akkor $\Gamma \vdash A$ is teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a ***kalkulus teljes*** *a szemantikus rendszerre nézve.*
Ha mind a kettő teljesül, akkor ***adekvátnak*** *nevezzük.*

11.2. Tétel. *A predikátumkalkulus helyes.*

11.3. Tétel (Gödel-féle teljességi tétel). *A predikátumkalkulus teljes.*

11.1. Következmény. $\Gamma \vdash A$ *pontosan akkor, ha* $\Gamma \models A$.

11.2. Következmény. $\vdash A$ *pontosan akkor, ha* $\models A$.

A természetes levezetés technikája:
Megjegyzés: Olyan szabályok rendszere, amelyek megkönnyítik a levezetéseket. A szabályok két típusba sorolhatók, strukturális és logikai szabályok.

Strukturális szabályok: Γ, Δ formulahalmaz, A, B, C formulák.

1.) Az azonosság törvénye:

$$\Gamma, A \vdash A$$

2.) A bővítés szabálya:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$$

3.) A permutálás szabálya:

$$\frac{\Gamma, B, C, \Delta \vdash A}{\Gamma, C, B, \Delta \vdash A}$$

4.) A redukció szabálya:

$$\frac{\Gamma, B, B, \Delta \vdash A}{\Gamma, B, \Delta \vdash A}$$

5.) A vágás szabálya:

$$\frac{\Gamma \vdash A; \qquad \Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

Megjegyzés: Az 1-5 szabályok a levezetés megengedő szabályai. Ez azt jelenti, hogy ha adva van a vonal feletti szekvencia levezetése, akkor megkonstruálható a vonal alatti szekvencia levezetése is, azaz a fenti szabályokat már igazolta helyettünk valaki a dedukció-tétel és a levezetési szabályok segítségével.

Logikai szabályok:

Bevezetés szabályai — Eltávolítás szabályai

Implikáció:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A; \qquad \Gamma \vdash A \supset B}{\Gamma \vdash B}$$

Konjunkció:

$$\frac{\Gamma \vdash A; \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$$

Diszjunkció:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}; \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash C; \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$$

Negáció:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B; \qquad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

Univerzális kvantor:

$$\frac{\Gamma \vdash A(y)}{\Gamma \vdash \forall y A(y)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}}$$

Egzisztenciális kvántor:

$$\frac{\Gamma \vdash A\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}}{\Gamma \vdash \exists x A} \qquad \frac{\Gamma, A(y) \vdash C}{\Gamma, \exists y A(y) \vdash C}$$

Megjegyzés:

1. Az univerzális kvantor bevezetésénél y nem szabad változó Γ-ban, az egzisztenciális kvantor eltávolításánál y nem szabad változó Γ-ban és C-ben.

2. A felsorolt szabályok megalapozása nem bonyolult, az axiómák és a levezetési szabályok segítségével könnyen igazolhatóak.

3. Minden logikai összekötőjelhez és kvantorhoz két szabály kapcsolódik, a bevezetés és az eltávolítás szabálya. A bevezetés szabálya arra vonatkozik, hogy hogyan bizonyíthatóak az adott logikai szimbólumokat tartalmazó formulák. Az eltávolítás szabálya arra vonatkozik, hogy hogyan lehet az ilyen szimbólumokat tartalmazó formulákat más formulák bizonyítására használni.

12. Gentzen-kalkulus

Bevezetés: A szintaktikailag felépített logikai rendszereket logikai kalkulusoknak is nevezzük, azaz logikai kalkulus nem más mint olyan formális rendszer, formális eljárás (szabályok gyűjteménye) melyek segítségével logikai törvényeket kapunk. Egy logikai kalkulus kiinduló *axiómákból és levezetési szabályokból* áll.

12.1. Definíció. *Legyenek* $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$ *és* $\Delta = \{B_1, ..., B_m\}$ *formula halmazok* $(n, m \geq 0)$*. Ekkor a*

$$\top \wedge A_1 \wedge ... \wedge A_n \supset B_1 \vee ... \vee B_m \vee \perp$$

formulát ***sequentnek*** *nevezzük.*

Jelölés: $A_1, ..., A_n \to B_1, ..., B_m$*, röviden* $\Gamma \to \Delta$*.*

Legyenek Γ és Δ formulák halmaza (lehet üres halmaz is), A és B formulák, x, y azonos típusú változók, t az x-el azonos típusú term.

A Gentzen-kalkulus axiómasémái:

$$A, \Gamma \to \Delta, A$$

$$\perp, \Gamma \to \Delta$$

A Gentzen-kalkulus levezetési szabályai:

$$(\wedge \to) \quad \frac{A, B, \Gamma \to \Delta}{(A \wedge B), \Gamma \to \Delta} \qquad\qquad (\to \wedge) \quad \frac{\Gamma \to \Delta, A; \qquad \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, (A \wedge B)}$$

$$(\vee \to) \quad \frac{A, \Gamma \to \Delta; \qquad B, \Gamma \to \Delta}{(A \vee B), \Gamma \to \Delta} \qquad\qquad (\to \vee) \quad \frac{\Gamma \to \Delta, A, B}{\Gamma \to \Delta, (A \vee B)}$$

$$(\supset \to) \quad \frac{\Gamma \to \Delta, A; \qquad B, \Gamma \to \Delta}{(A \supset B), \Gamma \to \Delta} \qquad\qquad (\to \supset) \quad \frac{A, \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, (A \supset B)}$$

$$(\neg \to) \quad \frac{\Gamma \to \Delta, A}{\neg A, \Gamma \to \Delta} \qquad\qquad (\to \neg) \quad \frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg A}$$

$$(\forall \to) \quad \frac{A\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \forall x A, \Gamma \to \Delta}{\forall x A, \Gamma \to \Delta} \qquad\qquad (\to \forall) \quad \frac{\Gamma \to \Delta, A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\Gamma \to \Delta, \forall x A}$$

$$(\exists \to) \quad \frac{A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \Gamma \to \Delta}{\exists x A, \Gamma \to \Delta} \qquad\qquad (\to \exists) \quad \frac{\Gamma \to \Delta, A\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \exists x A}{\Gamma \to \Delta, \exists x A}$$

Megjegyzés: $(\to \forall)$ és a $(\exists \to)$ szabálynál y nem szabad változó Γ-ban és Δ-ban.

12.2. Definíció. *Egy sequentet a **Gentzen-kalkulusban levezethetőnek** nevezünk, ha*

- *a.) vagy axióma,*
- *b.) vagy van olyan levezetési szabály, amelyben a vonal alatti sequent, és a vonal feletti sequent (sequentek) levezethető (levezethetőek).*

12.3. Definíció. *Ha* $\Gamma \to A$*, akkor* $\Gamma \models A$ *is teljesül (minden* A *formulára), akkor azt mondjuk, hogy a **kalkulus helyes** a szemantikus rendszerre nézve.*

Ha $\Gamma \models A$*, akkor* $\Gamma \to A$ *is teljesül (minden* A *formulára), akkor azt mondjuk, hogy a **kalkulus teljes** a szemantikus rendszerre nézve.*

*Ha mind a kettő teljesül, akkor **adekvátnak** nevezzük.*

12.1. Tétel. *A Gentzen-kalkulus helyes és teljes.*

12.1. Következmény. $\Gamma \to A$ *pontosan akkor, ha* $\Gamma \models A$*.*

Ekkor $\Gamma = \emptyset$*-t választva.*

$\to A$ *pontosan akkor, ha* $\models A$*.*

Példa: Mutassuk meg, hogy a $(A \supset B) \wedge (A \supset \neg B) \supset \neg A$ formula logikai törvény! Belátjuk, hogy a Gentzen-kalkulus levezethető sequentje.

$$\mathbf{A}, B \to \mathbf{A} \text{ ax.séma} \qquad \mathbf{B} \to \neg A, \mathbf{B} \text{ ax.séma}$$

$$(\to \neg) \qquad (\neg \to)$$

$$\mathbf{A}, (A \supset \neg B) \to \mathbf{A} \text{ ax.séma} \qquad bi.)\ B \to \neg A, A \qquad bii.) B, \neg B \to \neg A$$

$$(\to \neg) \qquad (\supset\to)$$

$$a.)\ (A \supset \neg B) \to \neg A, A \qquad b.)\ B, (A \supset \neg B) \to \neg A$$

$$(\supset\to)$$

$$(A \supset B), (A \supset \neg B) \to \neg A$$

$$(\wedge \to)$$

$$((A \supset B) \wedge (A \supset \neg B)) \to \neg A$$

$$(\to\supset)$$

$$\to ((A \supset B) \wedge (A \supset \neg B)) \supset \neg A$$

13. Formális axiomatikus elméletek

13.1. Definíció. ***Formális axiomatikus elmélet*** *alatt olyan* $T :=< \Omega, X >$ *párt értünk, ahol* Ω *egy matematikai logikai nyelv és* X *az* Ω*-beli zárt formulák halmaza. Az* X*-beli formulákat a* T *elmélet* ***nem logikai axiómáinak*** *nevezzük. (*X *lehet üres halmaz is.)*

13.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* Ω *nyelv egy* A ***formulája levezethető a*** T ***elméletben*** *(*A *formula a* T *elmélet tétele, jele* $T \vdash A$*) ha megadható* $\Gamma \subset X$ *nem logikai axiómák véges rendszere úgy, hogy a* $\Gamma \vdash A$ *szekvencia igaz a predikátumkalkulusban.*

13.3. Definíció. *Az* Ω *nyelv egy* I *interpretációja (modellje) a* $T =< \Omega, X >$ ***elmélet modellje****, ha minden nem logikai axióma teljesül* I*-ben, azaz minden* $A \in X$ *formula esetén* $I \models A$*.*

13.1. Tétel. *Ha* I *a* T *elmélet egy interpretációja és* $T \vdash B$ *akkor* $I \models B$ *is teljesül.*

13.4. Definíció. *A* $T =< \Omega, X >$ *formális axiomatikus elmélet* ***ellentmondásos****, ha létezik az* Ω *nyelvben olyan* A *zárt formula, hogy* $T \vdash A$ *és* $T \vdash \neg A$ *egyszerre teljesül. Ellenkező esetben a* T *elméletet* ***ellentmondástalannak*** *nevezzük.*

Megjegyzés: Ellentmondásos elméletben minden állítás (és az ellenkezője is) levezethető. Tegyük fel, hogy A az a zárt formula, amely az ellentmondást okozza, azaz $T \vdash A$ és $T \vdash \neg A$. C legyen egy tetszőleges zárt formula (C helyett $\neg C$-t is vehetünk), az implikáció eltávolításának szabályát (lásd modus ponens is) kétszer alkalmazva megmutatjuk, hogy $T \vdash C$ is teljesül.

$$\vdash A \supset (\neg A \supset C) \qquad \text{ismert logikai törvény (41. számú).}$$

$$T \vdash A \supset (\neg A \supset C) \qquad \text{bővítés szabálya.}$$

Majd az implikáció eltávolításának szabályát alkalmazzuk kétszer.

$$\frac{\begin{array}{l} T \vdash A \supset (\neg A \supset C) \\ T \vdash A \end{array}}{T \vdash (\neg A \supset C)}$$

és

$$\frac{\begin{array}{l} T \vdash \neg A \supset C \\ T \vdash \neg A \end{array}}{T \vdash C}$$

13.2. Tétel (Gödel-tétele). *Minden elsőrendű matematikai logikai nyelvet használó ellentmondástalan elméletnek van modellje.*

Megjegyzés: Ellentmondásos elméletnek nincs modellje.

13.5. Definíció. *A $T =< \Omega, X >$ formális axiomatikus elméletet* ***teljesnek*** *nevezzük, ha az Ω nyelv minden A zárt formulája esetén $T \vdash A$ vagy $T \vdash \neg A$ teljesül.*

Példa: (Formális axiomatikus elméletre) Az $\mathcal{A}r$ **elemi aritmetikai elmélet.**

Nyelve (Ω) az $\mathcal{A}r$ nyelv.

Nem logikai axiómák (X): (A formulák elé minden szabad változó szerint univerzális kvantort írunk.)

Az egyenlőség axiómái:

1.) $x = x$ (minden szám egyenlő önmagával)

2.) $((x = y) \wedge (x = z)) \supset (y = z)$ (tranzitivitás)

Peano-féle axiómák:

3.) $Sx \neq 0$ (a 0 egyetlen egy természetes számnak sem a rákövetkezője)

4.) $(Sx = Sy) \equiv (x = y)$

5.) $A(0) \wedge \forall x(A(x) \supset A(Sx)) \supset \forall x A(x)$ (a teljes indukció elve)

Az összeadás és a szorzás axiómái:

6.) $x + 0 = x$

7.) $x + Sy = S(x + y)$

8.) $x \cdot 0 = 0$

9.) $x \cdot Sy = x \cdot y + x$

Megjegyzés:

1. Az $\mathcal{A}r$ nyelv modellje a természetes számok halmaza a műveletekkel (összeadás, szorzás) ellátva, ez egyben az $\mathcal{A}r$ elemi aritmetikai elméletnek is modellje.

2. Az $\mathcal{A}r$ elemi aritmetikai elmélet nem teljes.

Példa: (További példák formális axiomatikus elméletre)

1. M^+ **naiv halmazelmélet.**

2. **Zermelo-Fraenkel-féle axiomatikus halmazelmélet** (ZF illetve a ZFC).

14. Naiv halmazelmélet nyelve (M^+)

Az M^+ nyelvben egyetlen típus van, ez a halmaz típus. Halmaz típusú változók: $x, y, z, ...$

14.1. Definíció. *(szintaktikai definíció) Az M^+ nyelv* ***termjei és formulái.***
Bázis:

a.) Minden változó term.

Indukciós lépés:

b.) Ha t, r termek, akkor $(t \in r)$ kifejezés formula.

c.) Ha φ, ψ formulák, akkor $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \supset \psi), \neg\varphi$ is formula.

d.) Ha x változó és φ formula, akkor $\forall x\varphi, \exists x\varphi$ is formula.

e.) Ha x változó és φ formula, akkor a $\{x|\varphi\}$ kifejezés term (absztrakció term).

Megjegyzés:

1. M^+ nem elsőrendű nyelv, mert a formulákat termek definiálására használjuk (lásd e.)), ezt elsőrendű nyelvben nem lehet megtenni.
2. $\{x|\varphi\}$ term kiolvasása: az „összes olyan x-k halmaza, amelyre a φ teljesül."
3. $\{x|\varphi\}$ termben az x kötött változó, tehát a $\{x| \quad \}$ szimbólum kvantorként viselkedik.

Jelölések:
$(x \notin y) \rightleftharpoons \neg(x \in y)$,
$(x \subseteq y) \rightleftharpoons \forall z((z \in x) \supset (z \in y))$,
$(x = y) \rightleftharpoons (x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x)$,
$(x \neq y) \rightleftharpoons \neg(x = y)$,
$(x \subset y) \rightleftharpoons (x \subseteq y) \wedge (x \neq y)$.

Nem logikai axiómák (X megadása):

A.) Meghatározottsági axióma:

$$(x = y) \wedge (x \in z) \supset (y \in z)$$

B.) Absztrakció axióma: φ tetszőleges formula M^+-ban

$$(z \in \{y|\varphi(y)\}) \equiv \varphi(z)$$

Megjegyzés: Az M^+ elméletben levezethető formulákat a naiv halmazelmélet törvényeinek (tételeinek) nevezzük.

Jelölés: $M^+ \vdash A$, $\quad .A$

Fogalmak:

1.) Nem rendezett pár fogalma:

$$\{x, y\} \rightleftharpoons \{z|\ (z = x) \vee (z = y)\}$$

14.1. Lemma. $.(u \in \{x, y\}) \equiv (u = x) \vee (u = y)$

$.x \in \{x, y\}$

$.y \in \{x, y\}$

$.\{x, y\} = \{y, x\}$

$.(\{x, y\} = \{u, v\}) \equiv ((x = u) \wedge (y = v)) \vee ((x = v) \wedge (y = u))$

2.) Az egyelemű halmaz fogalma:

$$\{x\} \rightleftharpoons \{z|z = x\}$$

14.2. Lemma. $.(u \in \{x\}) \equiv (u = x)$

$.x \in \{x\}$

$.(\{x\} = \{y\}) \equiv (x = y)$

$.(\{x\} = \{u, v\}) \equiv ((x = u) \wedge (x = v))$

3.) Az üres halmaz fogalma:

$$\emptyset \rightleftharpoons \{x|x \neq x\}$$

14.3. Lemma. $.\forall z(z \notin \emptyset)$

$.\emptyset \neq \{\emptyset\}$

$.\forall u(\emptyset \subseteq u)$

4.) Két halmaz metszete, uniója, különbsége:

$$x \cap y \rightleftharpoons \{z|(z \in x) \wedge (z \in y)\}$$

$$x \cup y \rightleftharpoons \{z|(z \in x) \vee (z \in y)\}$$

$$x \backslash y \rightleftharpoons \{z|(z \in x) \wedge (z \notin y)\}$$

14.4. Lemma. $.u \in x \cap y \equiv (u \in x) \wedge (u \in y)$
$.u \in x \cup y \equiv (u \in x) \vee (u \in y)$
$.u \in x \backslash y \equiv (u \in x) \wedge (u \notin y)$

5.) A korlátozott kvantor fogalma:

$(\forall x \in y)\varphi(x) \rightleftharpoons \forall x((x \in y) \supset \varphi(x))$ minden y-beli x-re a $\varphi(x)$ teljesül.

$(\exists x \in y)\varphi(x) \rightleftharpoons \exists x((x \in y) \wedge \varphi(x))$ van olyan y-beli x elem, amelyre $\varphi(x)$ teljesül.

14.5. Lemma. $.\neg(\forall x \in y)\varphi(x) \equiv (\exists x \in y)\neg\varphi(x)$
$.\neg(\exists x \in y)\varphi(x) \equiv (\forall x \in y)\neg\varphi(x)$

6.) Halmazrendszerek uniója és metszete:

$$\cup x \rightleftharpoons \{z : (\exists u \in x)(z \in u)\}$$

$$\cap x \rightleftharpoons \{z : (\forall u \in x)(z \in u)\}$$

Alaptulajdonsága:
$.(z \in \cup x) \equiv (\exists u \in x)(z \in u)$,
$.(z \in \cap x) \equiv (\forall u \in x)(z \in u)$.

7.) Az univerzális halmaz fogalma:

$$U \rightleftharpoons \{x | x = x\}$$

14.6. Lemma. $.\forall z(z \in U)$

8.) Az általános komplementer fogalma:

$$\overline{x} \rightleftharpoons U \backslash x$$

14.7. Lemma. $.(z \in \overline{x}) \equiv (z \notin x)$
$.\overline{x \cup y} = \overline{x} \cap \overline{y}$
$.\overline{x \cap y} = \overline{x} \cup \overline{y}$

9.) A hatványhalmaz fogalma:

$$\mathcal{P}x \rightleftharpoons \{z | z \subseteq x\}$$

14.8. Lemma. $.(u \in \mathcal{P}x) \equiv (u \subseteq x)$
$.\emptyset \in \mathcal{P}x$

10.) Kitüntetett végtelen halmaz fogalma (ω):

Az x halmaz rákövetkezője: $Sx \rightleftharpoons x \cup \{x\}$.

Egy halmazt progresszívnek nevezzük, ha elemként tartalmazza az üres halmazt és minden elemével együtt a rákövetkezőjét is tartalmazza. Azaz

$$Prog(x) \rightleftharpoons (\emptyset \in x) \wedge (\forall z \in x)(Sz \in x).$$

A kitüntetett vételen halmaz ω az összes progresszív halmazból álló halmazrendszer metszete:

$$\omega \rightleftharpoons \cap\{x : Prog(x)\}.$$

14.9. Lemma. $.\emptyset \in \omega,$
$.((z \in \omega) \supset (Sz \in \omega)),$
$.Prog(x) \supset (\omega \subseteq x).$

11.) Kijelöléssel definiált halmaz fogalma:

$$\{x \in y|\varphi(x)\} \rightleftharpoons \{x|(x \in y) \wedge \varphi(x)\}$$

14.10. Lemma. $.u \in \{x \in y|\varphi(x)\} \equiv (u \in y) \wedge \varphi(u)$

12.) Russell-féle halmaz fogalma:

$$\mathcal{R} \rightleftharpoons \{x|(x \notin x)\}$$

Alaptulajdonsága:

$$.u \in \mathcal{R} \equiv u \notin u$$

$u = \mathcal{R}$-t helyettesítve:

$$.\mathcal{R} \in \mathcal{R} \equiv \mathcal{R} \notin \mathcal{R}$$

Ellentmondásra jutottunk, ezt az ellentmondást Russell-féle paradoxonnak (antinómiának) is nevezik.
Megjegyzés:

1.) Az M^+ naiv halmazelmélet ellentmondásos, így benne bármely formula levezethető.

2.) Az M^+ naiv halmazelmélet ellentmondásos, így nincs modellje.

3.) A Russell-féle paradoxon fő oka az, hogy ilyen $\mathcal{R}$ halmaz nem létezik, mégis tudtuk definiálni.

15. Zermelo-Fraenkel-féle axiomatikus elmélet

Az ZF^+ nyelvben egyetlen típus van, ez a halmaz típus. Halmaz típusú változók: $x, y, z, ...$

15.1. Definíció. *(szintaktikai definíció) Az ZF^+ nyelv* ***termjei és formulái.***

Bázis:

a.) Minden változó term.

Indukciós lépés:

b.) Ha t és z term, akkor $(t \in z)$ formula.

c.) Ha φ, ψ formulák, akkor $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \supset \psi), \neg\varphi$ is formula.

d.) Ha x változó és φ formula, akkor $\forall x\varphi, \exists x\varphi$ is formula.

e.) A $\emptyset$ és ω szimbólumok termek.

f.) Ha t és z term, akkor $\{t, z\}$ szintén term.

g.) Ha t term, akkor Pt és $\cup t$ is term.

h.) Ha φ formula, t term, x olyan változó, amely nem paraméter t-ben, akkor a $\{x \in t : \varphi\}$ kifejezés term.

i.) Ha φ formula, t term, x és y olyan változók, amelyek nem paraméterek t-ben, akkor a $\{y : \ x \in t, \ (x \Rightarrow y), \ \varphi\}$ kifejezés term.

Megjegyzés: 1. A ZF^+ nyelvben $\emptyset, \omega, Pt, \cup t$ nem definiáltak, a nyelv alapszimbólumai.

2. A Zermelo-Fraenkel-féle axiomatikus elmélet részletes tárgyalása megtalálható [1]-ben. Itt csak az elmélet axiómáit fogalmazzuk meg.

A ZF axiomatikus elmélet nem logikai axiómái (X megadása):

1. Meghatározottsági axióma:

$$\forall x \forall y \forall z((x = y \wedge x \in z) \supset y \in z)$$

2. Az üres halmaz axiómája:

$$\exists u \forall z(z \notin u)$$

Ez alapján az axióma alapján létezik üres halmaz, jelöljük $\emptyset$-vel.

3. Páraxióma:
$$\forall x \forall y \exists u \forall z((z \in u) \equiv (z = x \vee z = y))$$
Azaz bármely két halmazhoz létezik olyan halmaz, amelyhez mindkét halmaz hozzátartozik elemként és több eleme nincs. Ezt $\{x, y\}$-al fogjuk jelölni. Ennek segítségével megadható az egyelemű halmaz fogalma.

4. Unió-axióma: Bármely halmazrendszerhez létezik olyan halmaz, amely mindazokat és csak azokat a halmazokat tartalmazza elemként, amelyek a rendszer legalább egy halmazának elemei (ezt a halmazt $\cup x$-el jelöljük).
$$\forall x \exists u \forall z((z \in u) \equiv (\exists v \in x)(z \in v))$$
Ennek a segítségével megadható két halmaz uniója.

5. Hatványhalmaz-axióma: Minden halmazhoz van olyan halmaz, amelynek elemei az adott halmaz részhalmazai. Jele: Px.
$$\forall x \exists y \forall z((z \in u) \equiv (z \subseteq x)),$$
ahol $z \subseteq x \rightleftharpoons \forall u((u \in z) \supset (u \in x))$.

6. Végtelen halmaz axiómája: Létezik olyan halmaz, amelynek eleme az $\emptyset$ és minden y eleme esetén $y \cup \{y\}$ (ez az y rákövetkezője) is eleme a halmaznak.

7. Részhalmaz-axióma (a kijelölés axiómája): Minden x halmaz és φ tulajdonság esetén létezik egy olyan u halmaz, amelyhez x-nek pontosan azok az elemei tartoznak, amelyekre a φ tulajdonság teljesül.
$$\forall x \exists u \forall z((z \in u) \equiv (z \in x) \wedge \varphi(z))$$
(itt $\varphi(z)$ tetszőleges formula, amelyben u nem szabad változó). Jelölés: $u = \{z \in x : \varphi(z)\}$. (Ebből az axiómából levezethető, hogy nem létezik univerzális halmaz. Ennek a segítségével definiálható két halmaz metszete, különbsége.)

8. A helyettesítés axiómája: Ha a v halmaz x eleméhez hozzá van rendelve egy z elem (valamely φ függvény által), akkor létezik olyan u halmaz, amelynek elemei a hozzárendelt z elemek.
$$\exists u \forall z((z \in u) \equiv (\exists x \in v)(\varphi(x, z) \wedge \forall y(\varphi(x, y) \supset (z = y))))$$
(itt $\varphi(z)$ tetszőleges formula, amelyben u, v nem szabad változó).

9. Regularitási axióma (fundáltság axiómája): Ha x nem üres halmaz, akkor x-ben van olyan z elem, hogy $z \cap x = \emptyset$ (minden nem üres halmaznak van az $\in$-tartalmazásra nézve legkisebb eleme).

10. Kiválasztási axióma (AC): Ha egy x nem üres halmaz elemei páronként diszjunkt, nem üres halmazok, akkor létezik olyan z kiválasztó halmaz, amelynek x minden elemével pontosan egy közös eleme van.

Megjegyzés: a. A ZF elmélet az 1-9 axiómákkal rendelkezik. Az AC független a ZF elmélettől, azaz $ZF \nvdash AC$ és $ZF \nvdash \neg AC$ (amennyiben ellentmondástalan). Az 1-10 axiómák a ZFC elmélet axiómái. Azaz a ZF elméletet kiegészítve az AC axiómával újabb elméletet kapunk, ezt jelöljük ZFC-vel.

b. Sem a ZF sem a ZFC elméletről nem sikerült belátni, hogy ellentmondásos, de a korábbi ismert antinómiák nem lépnek fel.

c. Ha a ZF elmélet ellentmondástalan, akkor a ZFC is az, és a ZFC-ben nem vezethető le sem a kontinuum hipotézis, sem a tagadása.

A természetes számok megadása:

Tekintsük az alábbi, halmazokból álló sorozatot:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, ...$$

Tehát az első tag üres halmaz, a második tag egy elemű halmaz, a harmadik tag két elemű halmaz, és így tovább. Ha bevezetjük a korábban használt $S(x) \rightleftharpoons x \cup \{x\}$ „rákövetkező” operációt, úgy minden tag az előtte álló tagból keletkezik az S operáció segítségével. Legyenek a természetes számok a fenti sorozat tagjai. Az így definiált ω-ra teljesülnek a Peano-féle axiómák (lásd korábban).

A rendezés megadása:

$(m < n) \rightleftharpoons (m \in n)$,

$(m \leq n) \rightleftharpoons (m \in Sn)$.

Irodalomjegyzék

[1.] Dragálin Albert, Buzási Szvetlána, Bevezetés a matematikai logikába, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 1997.

[2.] Pásztorné Varga Katalin, Várterész Magda, A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása, Panem Kiadó, Budapest 2003.

[3.] Sashalminé Kelemen Éva, A matematikai logika és a halmazelmélet elemei, EKTF Líceum Kiadó, Eger 1996.

[4.] Urbán János, Matematikai logika, Műszaki Könyvkiadó, 1983.

[5.] Ruzsa Imre, Logikai szintaxis és szemantika, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1988.