

# Logikai alapok a programozáshoz

Nagy Károly

2014

Javított, bővített változat (2020)

Nyíregyházi Egyetem  
Matematika és Informatika Intézet

## Tartalomjegyzék

1. Kijelentéslogika, ítéletkalkulus	2
2. A kijelentéslogika törvényei	6
3. Logikai törvények alkalmazása 1: diszjunktív normálforma és konjunktív normálforma.	10
4. Logikai következmény	12
5. A kijelentés logika műveleteiről	16
6. A predikátumlogika nyelve	18
7. Elsőrendű nyelvek	21
8. A nyelv szemantikája	29
9. Logikai törvények	33
10. Logikai törvények alkalmazása 2: prenex alak.	38
11. Gentzen-kalkulus	40
Irodalomjegyzék	42

# 1. Kijelentéslogika, ítéletkalkulus

**1.1. Definíció.** Azokat a kijelentő mondatokat, amelyekről egyértelműen el lehet dönteni, hogy igazak-e vagy hamisak, **kijelentéseknek** nevezzük. Az igaz, hamis értékeket logikai értékeknek nevezzük és 1, (i)-el vagy 0, (h)-val jelöljük. A legegyszerűbb (tovább nem bontható) kijelentéseket **atomi kijelentéseknek** nevezzük. Az atomi kijelentésekből **összetett kijelentéseket** készíthetünk az értékelési alapelv figyelembe vételével. A kijelentéseket **kijelentésváltozókkal** jelöljük. Ezek  $A, B, C \dots$ . Az  $A$  kijelentés logikai értékét  $|A|$ -val jelöljük. Ezek szerint  $|A| = 1$  vagy  $|A| = 0$ .

A következő elveket kell figyelembe venni:

**ellentmondástalanság elve:** egy kijelentés nem lehet egyszerre igaz is és hamis is.

**a harmadik kizárásának elve:** egy kijelentés vagy igaz vagy hamis, harmadik lehetőség nincs.

**értékelési alapelv:** az atomi kijelentésekből (komponensekből) összetett kijelentéseket készíthetünk a logikai műveletek segítségével, csak azokat a műveleteket tekintjük logikai műveleteknek, amelyeknél a komponensek logikai értékei az összetett kijelentés logikai értékét egyértelműen meghatározzák.

*Példa:* A következő mondatok közül melyik kijelentés?

A jelenlegi francia király Magyarországra érkezett tegnap.

$2 \cdot 2 = 4$ .

A zebra csíkos állat.

Ez a mondat hamis.

Milyen színű a kabátod?

Az 5 prímszám.

Logikai összekötőjelek:

Neve	Jele	Jelentése
negáció	$\neg$	„Nem igaz, hogy ...”
konjunkció	$\wedge$	„... és ...”
diszjunkció	$\vee$	„... vagy ...”
implikáció	$\supset$	„Ha ..., akkor ...”

**1.2. Definíció (Logikai összekötőjelek értelmezése).** Az  $(A \wedge B)$  formula pontosan akkor igaz, ha az  $A$  és a  $B$  egyszerre igaz.

Az  $(A \vee B)$  formula pontosan akkor igaz, ha az  $A$  és  $B$  közül legalább az egyik igaz.

A  $\neg A$  formula pontosan akkor igaz, ha az  $A$  formula hamis.

Az  $(A \supset B)$  formula pontosan akkor hamis, ha az  $A$  előtag igaz és a  $B$  utótag hamis egyszerre.

Ez megadható Quine-féle táblázatban is

$A$	$B$	$(A \wedge B)$	$(A \vee B)$	$(A \supset B)$	$\neg A$	$\neg B$
1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1

*Megjegyzés:* A köznyelvben kétféle vagy van a megengedő vagy és a kizáró vagy. A diszjunkció a megengedő vagy.

**1.3. Definíció (Induktív definíció).** Kijelentésváltozókból, logikai összekötőjelekből és zárójelpárokból álló jelsorozatokat **kijelentéslogikai formulának** nevezzük, ha a következő szabályok szerint kapjuk meg.

*Bázis:*

a.) Ha  $A$  kijelentésváltozó, akkor  $A$  a kijelentéslogika formulája.

*Indukciós lépés:*

b.) Ha  $A$  és  $B$  a kijelentéslogika formulája, akkor  $(A \wedge B)$ ;  $(A \vee B)$ ;  $(A \supset B)$ ;  $\neg A$ ;  $\neg B$  is kijelentéslogikai formulák.

*Más jelsorozatok nem formulák a kijelentéslogikában.*

*Megjegyzés:* A kijelentéslogika minden formulája vagy

a) kijelentésváltozó

vagy

b) az indukciós lépés véges sokszori alkalmazásával nyert formula.

*Példa:* A következő jelsorozatok kijelentéslogikai formulák-e?

$\neg(\neg A)$  (nem, mert negáció nem rak maga köré zárójeleket),

$(AB)$  (nem, logikai összekötőjel hiányzik az  $A$  és a  $B$  között),

$A \vee B \supset C$  (nem, zárójelpárok hiányoznak),

$((A \wedge B) \supseteq C)$  (nem, nincs ilyen logikai összekötőjel „ $\supseteq$ ”),

$(A \wedge B) \supset$  (nem, implikáció utótagja hiányzik),

$A \supset B)$  (nem, a zárójel párja hiányzik),

$((A \supset C) \wedge (B \vee \neg C))$  (igen, felépíthető az induktív definícióval).

További logikai összekötőjelek:

Neve	Jele	Jelentése
ekvivalencia	$\equiv$	„... pontosan akkor, ha ...”
sem-sem művelet	$\parallel$	„Sem ..., sem ...”
Scheffer-művelet	$ $	„Nem igaz, hogy ... és ...”
Alternáció (kizáró vagy)	$\oplus$	„... vagy ...”

Azaz

$$\begin{aligned}(A \equiv B) &\Leftrightarrow ((A \supset B) \wedge (B \supset A)), \\(A \parallel B) &\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B), \\(A | B) &\Leftrightarrow \neg(A \wedge B), \\(A \oplus B) &\Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)).\end{aligned}$$

Quine-féle táblázatban

$A$	$B$	$(A \equiv B)$	$(A \parallel B)$	$(A   B)$	$(A \oplus B)$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0

Megállapodások rövidítésekről:

- Külső zárójelek elhagyhatóak.
- Ekvivalencia, sem-sem művelet, Scheffer-művelet és alternáció használata.
- Logikai összekötőjelek prioritása: a prioritás nő a következő sorrendben  
 $\equiv \supset \wedge \neg$   
 $\vee$
- A ponthasználat konvenciója: Azonos prioritás esetén a jobbról álló pont jelöli a zárójelen belüli leggyengébb logikai összekötőjelet. (Mi ezt csak az implikáció esetén fogjuk használni.)

*Példa:* Tekintsük át a korábbi példánkat! Van-e a megadott példák között olyan, amely a rövidítéseket figyelembe véve kijelentéslogikai formula lesz?

Igen, a  $A \vee B \supset C$  kifejezés formula lesz.

Jelentése:

$$((A \vee B) \supset C).$$

*Példa:*

a.)

$$P \supset (Q \vee R \equiv \neg R \supset \neg P)$$

rövidített formula jelentése:

$$(P \supset ((Q \vee R) \equiv (\neg R \supset \neg P)))$$

b.)

$$P \supset (Q \vee R \supset \neg R \supset \neg P)$$

rövidített formula jelentése:

$$(P \supset ((Q \vee R) \supset (\neg R \supset \neg P)))$$

c.)

$$(P \supset Q \supset R) \vee P \supset Q$$

rövidített formula jelentése:

$$(((P \supset Q) \supset R) \vee P) \supset Q$$

**1.4. Definíció.** *Egy kijelentéslogikai formula **nyelvi interpretációján** a benne szereplő kijelentésváltozók konkrét kijelentésekkel való helyettesítését értjük. Egy kijelentéslogikai formula **interpretációján** a benne szereplő kijelentésváltozók logikai értékének megadását értjük.*

*Megjegyzés:* Az interpretáció megadásakor kiválasztunk a formula értéktáblázatából egy sort.

## 2. A kijelentéslogika törvényei

**2.1. Definíció.** *A kijelentéslogika egy  $A$  formulája logikai törvény vagy azonosan igaz formula, vagy tautológia, ha  $A$  igaz minden interpretációban.*

*Jelölés:  $\models A$ .*

*Az  $A$  formula logikailag ellentmondásos, vagy kontradikció, ha minden interpretációban hamis.*

*Az  $A$  formula kielégíthető, ha van olyan interpretáció amelynél  $A$  igaz.*

*Az  $A$  és  $B$  formulák logikailag ekvivalensek, ha az  $(A \equiv B)$  formula logikai törvény.*

*Jelölés:  $A \sim B$ .*

*Példa:* Készítse el az  $A \equiv (B \vee C \supset .C \supset \neg A)$  formula értéktáblázatát!  
Döntsük el, hogy kontradikció-e, kielégíthető-e, logikai törvény-e!

$A$	$B$	$C$	$(A \equiv ((B \vee C) \supset (C \supset \neg A)))$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

5.)      1.)      4.)      3.)      2.)

A formula értéktáblázatának a főoszlopa az 5.) oszlop. Ez alapján mondhatjuk, hogy a formula kielégíthető, nem kontradikció és nem logikai törvény.

### Logikai törvények:

Asszociativitás:

$$1.) A \wedge (B \wedge C) \sim (A \wedge B) \wedge C,$$

$$2.) A \vee (B \vee C) \sim (A \vee B) \vee C.$$

Kommutativitás:

$$3.) (A \wedge B) \sim (B \wedge A),$$

$$4.) (A \vee B) \sim (B \vee A).$$

Disztributivitás:

$$5.) A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C),$$

$$6.) A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

Idempotencia:

$$7.) A \wedge A \sim A,$$

$$8.) A \vee A \sim A.$$

Elimináció:

$$9.) A \wedge (A \vee B) \sim A,$$

$$10.) A \vee (A \wedge B) \sim A.$$

De Morgan törvények:

$$11.) \neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B,$$

$$12.) \neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B.$$

Az implikáció tagadása:

$$13.) \neg(A \supset B) \sim A \wedge \neg B.$$

Ellentmondás az implikációban:

$$14.) A \supset \neg A \sim \neg A,$$

$$15.) \neg A \supset A \sim A,$$

$$16.) \models \neg(A \equiv \neg A).$$

Logikai jelek közötti összefüggések:

$$17.) A \wedge B \sim \neg(\neg A \vee \neg B),$$

$$18.) A \vee B \sim \neg(\neg A \wedge \neg B),$$

$$19.) A \supset B \sim \neg(A \wedge \neg B),$$

$$20.) A \supset B \sim B \vee \neg A,$$

$$21.) A \wedge B \sim \neg(A \supset \neg B),$$

$$22.) A \vee B \sim \neg A \supset B.$$

Kontrapozíció törvénye:



$$23.) A \supset B \sim \neg B \supset \neg A.$$

Kétszeres tagadás törvénye:

$$24.) \neg\neg A \sim A.$$

Előtagok felcserélése implikációban:

$$25.) A \supset (B \supset C) \sim B \supset (A \supset C).$$

Implikáció konjunktív előtaggal:

$$26.) (A \wedge B) \supset C \sim A \supset (B \supset C).$$

Jelölés:

Legyen  $C$  egy tetszőleges kijelentés változó.

$\top := (C \vee \neg C)$  „szabvány igaz”,

$\perp := (C \wedge \neg C)$  „szabvány hamis”.

Kiszámítási törvények:

$$27.) A \vee \top \sim \top,$$

$$28.) A \vee \perp \sim A,$$

$$29.) A \wedge \top \sim A,$$

$$30.) A \wedge \perp \sim \perp,$$

$$31.) A \supset \top \sim \top,$$

$$32.) A \supset \perp \sim \neg A,$$

$$33.) \top \supset A \sim A,$$

$$34.) \perp \supset A \sim \top.$$

Azonosság törvénye:

$$35.) \models A \supset A.$$

Bővítés előtaggal:

$$36.) \models A \supset (B \supset A).$$

Az implikáció öndisztributivitása:

$$37.) A \supset (B \supset C) \sim (A \supset B) \supset (A \supset C).$$

Esetelemzés (implikáció diszjunktív előtaggal):

$$38.) (A \vee B) \supset C \sim (A \supset C) \wedge (B \supset C).$$

Tranzitivitás:

$$39.) \models ((A \supset B) \wedge (B \supset C)) \supset (A \supset C).$$

Reductio ad absurdum:

$$40.) \models ((A \supset B) \wedge (A \supset \neg B)) \supset \neg A.$$

Negáció az implikációs előtagban:

$$41.) \models A \supset (\neg A \supset B).$$

A kizárt harmadik törvénye:

$$42.) \models A \vee \neg A.$$

Az ellentmondás törvénye:

$$43.) \models \neg(A \wedge \neg A).$$

Pierce-törvény:

$$44.) \models ((A \supset B) \supset A) \supset A.$$

*Megjegyzés:* A kijelentéslogikai törvényeket értéktáblázattal bizonyíthatjuk.

*Példa:* Bizonyítsuk be a 40. Reduktio ad absurdum logikai törvényt!

A	B	$((A \supset B) \wedge (A \supset \neg B)) \supset \neg A$					
1	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

*Megjegyzés:* A kijelentéslogikai törvények ismeretében további megállapodásokat teszünk a rövidítésekről.

- Az asszociativitás miatt többtagú konjunkció, diszjunktio leírható zárójelek nélkül.
- Az idempotencia törvény miatt beszélhetünk egytagú konjunkcióról, diszjunktioról.

*Megjegyzés:* Az asszociativitás törvény miatt a konjunkció és diszjunktio esetében nincs értelme a ponthasználat konvenciójának. Az implikáció nem asszociatív művelet, ezért alkalmazzuk rá a ponthasználat konvencióját.

### 3. Logikai törvények alkalmazása 1: diszjunktív normálforma és konjunktív normálforma.

**3.1. Definíció.** *Egy kijelentésváltozót vagy a negáltját literálnak nevezünk.*

*Legyenek  $L_1, L_2, \dots, L_n$  literálok ( $n \geq 1$ ). Az  $(L_1 \wedge L_2 \wedge \dots \wedge L_n)$  alakú formulákat elemi konjunktiónak, az  $(L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n)$  alakú formulákat elemi diszjunktiónak nevezünk.*

*Legyenek  $K_1, K_2, \dots, K_m$  elemi konjunktciók (ahol  $m \geq 1$ ), ekkor a  $(K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_m)$  alakú formulákat diszjunktív normálformának (d.n.f.) nevezünk.*

*Legyenek  $D_1, D_2, \dots, D_m$  elemi diszjunktciók (ahol  $m \geq 1$ ), ekkor a  $(D_1 \wedge D_2 \wedge \dots \wedge D_m)$  alakú formulákat konjunktív normálformának (k.n.f.) nevezünk.*

*Megjegyzés:* Egy literál elemi konjunktció és elemi diszjunktció is (válasszunk a definícióban  $n = 1$ -t), de k.n.f. és d.n.f. is (válasszunk a definícióban  $n = m = 1$ -t) egyszerre.

Egy elemi konjunktció d.n.f is (és k.n.f. is) és egy elemi diszjunktció k.n.f. is (és d.n.f. is) (válasszunk a definícióban  $m = 1$ -t ( $n = 1$ -t)).

**3.1. Lemma.** *A kijelentéslogika minden formulája konjunktív normálformára ill. diszjunktív normálformára hozható, azaz logikailag ekvivalens valamely konjunktív normálformával ill. diszjunktív normálformával.*

*Bizonyítás:* Megadunk egy algoritmust, amellyel mindig megkapjuk a d.n.f. illetve a k.n.f. alakot.

- 0.) A hiányzó zárójeleket kirakjuk.
- 1.) A logikai törvények segítségével kicseréljük az implikációt és az ekvivalenciát az  $\wedge, \vee, \neg$  jelekre.
- 2.) A de Morgan és a kétszeres tagadás törvényeket többször egymás után alkalmazva elérjük, hogy a negációk csak a komponensekre vonatkozzanak.
- 3.) A disztributivitás törvényeket használva elérjük azt, hogy a konjunktciók és a diszjunktciók a megfelelő sorrendben kövessék egymást.
- 4.) Egyszerűsítünk. (Használjuk az idempotencia, az elimináció és a kiszámítási törvényeket.)

*Példa:* Hozzuk d.n.f. illetve k.n.f. alakra az  $(A \supset (B \wedge \neg C)) \supset C$  formulát!

$$\begin{aligned} ((A \supset (B \wedge \neg C)) \supset C) &\sim C \vee \neg(A \supset (B \wedge \neg C)) && \text{(kicseréljük az } \supset\text{-t)} \\ &\sim C \vee \neg((B \wedge \neg C) \vee \neg A) && \text{(kicseréljük az } \supset\text{-t)} \\ &\sim C \vee (\neg(B \wedge \neg C) \wedge \neg\neg A) && \text{(de Morgan törv.)} \\ &\sim C \vee ((\neg B \vee \neg\neg C) \wedge \neg\neg A) && \text{(de Morgan törv.)} \\ &\sim C \vee ((\neg B \vee C) \wedge A) && \text{(kétszeres tagadás törv.)} \\ &\sim C \vee (\neg B \wedge A) \vee (C \wedge A) && \text{(disztributivitás) d.n.f.} \\ &\sim C \vee (\neg B \wedge A) && \text{(elimináció) d.n.f. alak} \\ &\sim (C \vee \neg B) \wedge (C \vee A) && \text{(disztributivitás) k.n.f.} \end{aligned}$$

## 4. Logikai következmény

**4.1. Definíció.** Jelölje  $\Gamma$  a kijelentéslogika véges sok formulájának a halmazát,  $A$  pedig a kijelentéslogika egy formuláját. Azt mondjuk, hogy  $A$  logikai következménye (szemantikai következménye) a  $\Gamma$ -beli formuláknak (jelölés:  $\Gamma \models A$ ), ha az  $A$  és a  $\Gamma$ -beli formulák minden olyan interpretációjára esetén, amikor az  $\Gamma$ -beli formulák mindegyike igaz, akkor az  $A$  is igaz lesz. Ha a  $\Gamma$  a  $B_1, B_2, \dots, B_n$  formulákból áll, úgy ezeket premisszáknak (feltételeknek), az  $A$ -t konklúzióknak (zárótételnek) nevezzük.

Jelölések:  $\Gamma \models A$ ,

$B_1, B_2, \dots, B_n \models A$ ,

$$\frac{B_1, B_2, \dots, B_n}{A},$$

$B_1$

$B_2$

$\vdots$

$B_n$

$A$

Ezeket a formációkat következtetési sémáknak is nevezzük.

**4.1. Tétel.** Egy  $A$  formula pontosan akkor logikai következménye a  $B_1, B_2, \dots, B_n$  formuláknak, ha a  $(B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_n) \supset A$  formula logikai törvény.

Jelekkel:  $B_1, B_2, \dots, B_n \models A$  akkor és csakis akkor, ha  $\models (B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_n) \supset A$ .

*Példa:* Az  $\neg A \vee B, C \supset \neg B$  formuláknak logikai következménye-e a következő formula?

a.)  $A \supset \neg C$

b.)  $A \vee \neg C$

A feladatot értéktáblázattal oldjuk meg. Az értéktáblázatban mindkét konklúziót feltüntetjük.

$A$	$B$	$C$	$\neg A \vee B$	$C \supset \neg B$	$A \supset \neg C$	$A \vee \neg C$
1	1	1	1	0		
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1		
1	0	0	0	1		
0	1	1	1	0		
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1

a.) Az aláhúzott sorokban a premisszák egyszerre igazak, a konklúzió is igaz. Tehát  $A \supset \neg C$  logikai következmény.

b.) A 7. sorban a premisszák egyszerre igazak, a konklúzió pedig hamis. Tehát  $A \vee \neg C$  nem logikai következmény.

*Megjegyzés:* A definícióval egyenértékű megfogalmazás: helyes a következtetés, ha nincs olyan interpretáció, amelynél a premisszák mind igazak a konklúzió pedig hamis.

*Példa:* Az  $A \supset (B \supset C)$ ,  $\neg D \vee \neg A$ ,  $B$  formuláknak logikai következménye-e a  $D \supset C$  formula?

Értéktáblázattal 16 sort kellene írunk, így most a megjegyzésünk figyelembevételével fogjuk megoldani:

Tegyük fel a megjegyzés ellenkezőjét, azaz van olyan interpretáció, amikor a  $P_1$ ,  $P_2$  és  $P_3$  premisszák egyszerre igazak és a  $K$  konklúzió hamis.

Ezt az interpretációt keressük.

Tehát  $|P_1| = |P_2| = |P_3| = 1$  és  $|K| = 0$ .

Vegyük  $0 = |K| = |D \supset C|$ -t, ez csak úgy lehet, ha  $|C| = 0$  és  $|D| = 1$ .

Vegyük  $1 = |P_3|$ -t, amiből  $|B| = 1$  adódik, majd tekintsük  $1 = |P_2| = |\neg D \vee \neg A|$ -t, amiből azonnal adódik, hogy  $|\neg A| = 1$  (hiszen  $|\neg D| = 0$ ), azaz  $|A| = 0$ .

Most tekintsük a  $1 = |P_1| = |A \supset (B \supset C)|$ -t, ami teljesül (az  $|A| = 0$ ,  $|B| = 1$  és  $|C| = 0$  logikai értékeket ismerjük).

Megtaláltuk a keresett interpretációt. Ez  $|A| = 0$ ,  $|B| = 1$ ,  $|C| = 0$  és  $|D| = 1$ . Ezen interpretációnál  $|P_1| = |P_2| = |P_3| = 1$  és  $|K| = 0$ , így nem logikai következménye a premisszáknak a zárótétel.

Nevezetes következtetési sémák:

Modus ponens:

$$\frac{P \supset Q \quad P}{Q}$$

Indirekt következtetési sémák:

$$\frac{\neg P \supset Q \quad \neg P \supset \neg Q}{P}$$

$$\frac{P \supset Q \quad P \supset \neg Q}{\neg P}$$

$$\frac{\neg P \supset Q \quad \neg Q}{P}$$

$$\frac{\neg P \supset \neg Q \quad Q}{P}$$

$$\frac{P \supset Q \quad \neg Q}{\neg P}$$

$$\frac{P \supset \neg Q \quad Q}{\neg P}$$

Kontrapozíció:

$$\frac{P \supset Q}{\neg Q \supset \neg P}$$

Láncszabály:

$$\frac{P \supset Q \quad Q \supset R}{P \supset R}$$

Diszjunktív szillogizmus:

$$\frac{P \vee Q \quad \neg P}{Q}$$

*Bizonyítás:* Csak néhányat látunk be, a többi hasonlóan megy.

Először az indirekt következtetési sémák közül látjuk be a másodikat. A tételünket fogjuk használni.

$((P \supset Q) \wedge (P \supset \neg Q)) \supset \neg P$  formula logikai törvény, (lásd 40. Reductio ad absurdum). Tehát a tételünk miatt logikai következmény.

Másodszor a kontrapozíciót mutatjuk meg. A tételünket fogjuk használni.

Megmutatjuk, hogy a  $(P \supset Q) \supset (\neg Q \supset \neg P)$  formula logikai törvény. Tehát a tételünk miatt logikai következmény.

$$\begin{aligned}
(P \supset Q) \supset (\neg Q \supset \neg P) &\sim \\
&\sim \neg(P \supset Q) \vee (\neg Q \supset \neg P) \quad (\text{impl. kifejezése diszjunkcióval}) \\
&\sim \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg\neg Q \vee \neg P) \quad (\text{impl. kifejezése diszjunkcióval}) \\
&\sim (\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg\neg Q \vee \neg P) \quad (\text{de Morgan törvények}) \\
&\sim (P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee \neg P) \quad (\text{kettős tagadás}) \\
&\sim (P \wedge \neg Q) \vee Q \vee \neg P \quad (\text{asszociativitás, d.n.f.}) \\
&\sim (P \vee Q \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee Q \vee \neg P) \quad (\text{disztributivitás, k.n.f.}) \\
&\sim (\top \vee Q) \wedge (\top \vee \neg P) \quad (\text{def. szabvány igaz}) \\
&\sim \top \wedge \top \quad (\text{kiszámítási törvények}) \\
&\sim \top \quad (\text{kiszámítási törvények}).
\end{aligned}$$

(Lásd még 23. Kontrapozíció törvénye).

Harmadszor a láncszabályt mutatjuk meg. Szintén a tételünket fogjuk használni.

$((P \supset Q) \wedge (Q \supset R)) \supset (P \supset R)$  logikai törvény (lásd 39. Tranzitivitás). Tehát a tételünk miatt logikai következmény.

Utoljára a diszjunktív szillogizmust bizonyítjuk be. Ismét a tételünket szeretnénk használni. Megmutatjuk, hogy a  $((P \vee Q) \wedge \neg P) \supset Q$  formula logikai törvény, így a tételünk miatt logikai következmény lesz. Hozzuk k.n.f. alakra!

$$\begin{aligned}
((P \vee Q) \wedge \neg P) \supset Q &\sim ((P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg P)) \supset Q \quad (\text{disztributivitás}) \\
&\sim (\perp \vee (Q \wedge \neg P)) \supset Q \quad (\text{def. szabvány hamis}) \\
&\sim (Q \wedge \neg P) \supset Q \quad (\text{kiszámítási törvények}) \\
&\sim \neg(Q \wedge \neg P) \vee Q \quad (\text{impl. kifejezése diszjunkcióval}) \\
&\sim (\neg Q \vee P) \vee Q \quad (\text{de Morgan törvények}) \\
&\sim \neg Q \vee P \vee Q \quad (\text{k.n.f és d.n.f., asszociativitás}) \\
&\sim \neg Q \vee Q \vee P \quad (\text{kommutativitás}) \\
&\sim \top \vee P \quad (\text{def. szabvány igaz}) \\
&\sim \top \quad (\text{kiszámítási törvények}).
\end{aligned}$$



## 5. A kijelentés logika műveleteiről

Attól függően, hogy hány kijelentésváltozó (komponens) szerepel a logikai műveletben beszélhetünk egy-, két-,  $n$ -változós logikai műveletről.

Egy  $n$ -változós művelet értéktáblázata  $2^n$  sorból áll, hiszen  $n$  helyre választunk két érték (1 vagy 0) közül úgy, hogy a sorrend számít (ismétléses variációval számolunk). Egy ilyen értéktáblázat írja le az  $n$ -változós logikai műveletünket. Ahány egymástól különböző értéktáblázat van annyi egymástól különböző logikai műveletünk van. Az értéktáblázat  $2^n$  sorának minden helyére két érték közül választhatunk ismét (ismétléses variációval számolunk), ez  $2^{(2^n)}$  lehetőség. Tehát az  $n$ -változós logikai műveletek száma  $2^{(2^n)}$ .

A lehetséges egyváltozós műveletek száma  $2^{(2^1)} = 4$ . Ezek a következők:

$$A, \quad \neg A, \quad \top (\equiv A \vee \neg A), \quad \perp (\equiv A \wedge \neg A).$$

A kétváltozós műveletek száma  $2^{2^2} = 16$ . Ezek a következők (ha a változók  $A, B$ ):

$$A, \quad \neg A, \quad B, \quad \neg B, \quad \top, \quad \perp, \quad (A \wedge B), \quad \neg(A \wedge B), \quad (A \vee B), \quad \neg(A \vee B), \\ (A \supset B), \quad \neg(A \supset B), \quad (B \supset A), \quad \neg(B \supset A), \quad (A \equiv B), \quad \neg(A \equiv B)$$

Felvetődik a következő kérdés. Ha adott egy ismeretlen  $n$ -változós logikai művelet értéktáblázata, akkor meg lehet-e konstruálni egy olyan logikai műveletet, amely logikailag ekvivalens az eredeti ismeretlen művelettel, azaz a megadott értéktáblázat tartozik hozzá.

A felvetett kérdésre a válasz igen, meg lehet konstruálni ilyen logikai műveletet.

Eljárás a keresett  $n$ -változós művelet elkészítésére: Kiválasztjuk azokat a sorokat, amelyekben a logikai művelet eredménye 1. Minden egyes ilyen sorhoz elemi konjunkciókat képzünk oly módon, hogy az igaz komponensek változatlanul és a hamis komponensek negálva szerepeljenek. A kapott elemi konjunkciókat diszjunkcióval kötjük össze. Az így kapott d.n.f. írja le a kérdéses műveletet. Lehetőségünk van k.n.f. megkonstruálására is.

*Példa:* A megadott értéktáblázathoz konstruáljon egy formulát!

$A$	$B$	$C$	$F(A, B, C) = ?$	elemi konjunkciók
1	1	1	0	
1	1	0	1	$(A \wedge B \wedge \neg C)$
1	0	1	0	
1	0	0	0	
0	1	1	0	
0	1	0	1	$(\neg A \wedge B \wedge \neg C)$
0	0	1	1	$(\neg A \wedge \neg B \wedge C)$
0	0	0	0	

Tehát a keresett háromváltozós formula

$$F(A, B, C) \sim (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C).$$

A következő megfeleltetés lehetséges a kijelentéslogikai formulák és az áramkörök között.

kijelentéslogika	áramkörök
$A$ kijelentésváltozó	$A$ kapcsoló,
$ A  = 1$	$A$ kapcsoló zárt állású,
$ A  = 0$	$A$ kapcsoló nyitott állású,
$(A \wedge B)$	az $A$ és a $B$ kapcsoló soros kötése,
$(A \vee B)$	az $A$ és a $B$ kapcsoló párhuzamos kötése,
$\neg A$	váltóállású kapcsoló.

Ennek megfelelően a fenti értéktáblázat egy áramkör működését írja le. Az ismeretlen áramkörrel azonos működésű áramkör a d.n.f. segítségével már elkészíthető.

## 6. A predikátumlogika nyelve

Jelen fejezetben szeretnénk motivációt nyújtani arra, hogy a kijelentéslogika nyelvétől elrugaszkodva egy sokkal általánosabb nyelv fogalmát definiáljunk. Természetesen ennek az újabb nyelvnek a predikátumlogika nyelve is része lehet. Így ez a fejezet lehet, hogy több kérdést fog felvetni, mint amennyit konkrétan megválaszol. De nem is a minden tekintetben korrekt válaszok megtalálása a célunk, hanem az, hogy megvilágítsuk a következő fejezet fogalmainak a jelentését.

**6.1. Definíció.** *Egy tulajdonságot, kapcsolatot, relációt **predikátumnak** nevezünk. Amiről állítunk valamit, azt **individuumnak (individuumnévnek)** nevezzük. A predikátumokat predikátumváltozókkal (nagybetűk), az individuumokat pedig kisbetűkkel jelöljük.*

*Beszélhetünk egy- és többváltozós predikátumokról. Tehát általánosan írhatjuk  $P(a_1, \dots, a_n)$ , ahol  $n \geq 0$  (ahol  $P$  predikátumváltozó, az  $a_1, \dots, a_n$  individuumnevek). A predikátumokat sokszor  $P(x_1, \dots, x_n)$  alakban is megadhatjuk, ahol  $x_1, \dots, x_n$  individuumváltozók. A kijelentéseket nullváltozós predikátumoknak is tekinthetjük, jelölésük kijelentésváltozókkal (0-változós predikátumváltozókkal) történik. A  $P(b_1, \dots, b_n)$  (ahol  $b_1, \dots, b_n$  individuumnevek vagy individuumváltozók valamelyike)  $n \geq 0$  kifejezést predikátumlogikai atomi formulának nevezzük.*

Itt fontos észrevenni, hogy a következő műveleteket alkalmazhatjuk predikátumokra:

Konkretizáció: a predikátum változóiba individuumneveket helyettesítünk.

Átjelölés: a predikátum individuumváltozóit más individuumváltozókkal helyettesítjük. Ezekről a következő fejezetekben bővebben szó lesz.

**6.2. Definíció (Induktív definíció).** *A predikátumlogika formulái*

*Bázis:*

*a.) Atomi formula a predikátumlogika formulája.*

*Indukciós lépés:*

*c.) Ha  $A$  és  $B$  formula, akkor  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \supset B)$ ,  $\neg A$ ,  $\neg B$  is predikátumlogikai formulák.*

*d.) Ha  $A$  formula és  $x$  individuumváltozó, akkor  $\forall x A$ ,  $\exists x A$  is predikátumlogikai formulák.*

*Más jelsorozatok nem formulák a predikátumlogikában.*

*Példa:* Építse fel az induktív definícióval az  $((A \wedge \forall x \exists y B(x, y)) \supset \neg \exists x C(a, x))$  formulát!

	$((A \wedge \forall x \exists y B(x, y)) \supset \neg \exists x C(a, x))$	
	$(A \wedge \forall x \exists y B(x, y))$	
	$\forall x \exists y B(x, y)$	$\neg \exists x C(a, x)$
	$\exists y B(x, y)$	$\exists x C(a, x)$
Bázis: $A$	$B(x, y)$	$C(a, x)$

*Példa:* Formulák-e a következő kifejezések?

$\forall \forall A(x, y); \forall A; \forall x, y A(x, y), \neg \exists x B(x, y)$ .

**6.3. Definíció.** *Predikátumlogikai formula interpretációján azt értjük, hogy helyettesítjük a benne szereplő predikátumváltozókat konkrét predikátumokkal, az individuumnevekhez konkrét individuumokat rendelünk hozzá. (nyelvi interpretáció)*

*Példa:* Legyenek  $x, y$  individuumváltozók.

Legyen  $P(x, y)$  predikátum jelentése  $x$  az  $y$  gyermeke.

Mit jelent a következő formula?

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

*Példa:* Fogalmazza meg a predikátumlogika nyelvén a következő mondatokat!

Pisti kék szemű. Pisti felesége kék szemű. Minden ember kék szemű. Van olyan ember aki kék szemű.

Jelölések:

$x, y$  individuumváltozók (később ember típusú változók),

$f(x) = x$  felesége (egyváltozós függvény),

$a =$  Pisti, individuumnév (később ember típusú konstans),

$P(x)$ :  $x$  kék szemű (egyváltozós predikátum).

Ekkor a mondataink:

$$P(a)$$

$$P(f(x))$$

$$\forall x P(x)$$

$$\exists xP(x)$$

De az utóbbi két mondatot

$$\forall yP(y), \quad \exists yP(y)$$

alakban is megadhatjuk.

**6.4. Definíció.** Legyen  $P(x)$  egy konkrét egyváltozós predikátum.  $\forall xP(x)$  pontosan akkor igaz, ha minden „ $a$ ” individuum esetén  $P(a)$  igaz.  $\exists xP(x)$  pontosan akkor igaz, ha van olyan „ $a$ ” individuum, amelyre  $P(a)$  igaz lesz.

*Példa:* Fogalmazzza meg a predikátumlogika nyelvén a következő mondatokat!

Mindenki szeret valakit.

Pisti minden embert szeret.

Pisti feleségét mindenki szereti.

Használjuk a korábbi példa jelöléseit! Továbbá, legyen

$S(x, y)$ :  $x$  szereti  $y$ -t (kétváltozós predikátum).

Ekkor a mondataink:

$$\forall x\exists yS(x, y)$$

$$\forall yS(a, y)$$

$$\forall xS(x, f(a))$$

*Példa:* Az előző példa jelöléseivel mit jelentenek a következő formulák?

$$\forall xS(x, y)$$

$$\exists yS(x, y)$$

$$\forall xS(x, x)$$

Jelentés:

Mindenki szereti  $y$ -t.

$x$  szeret valakit.

Mindenki szereti önmagát.

## 7. Elsőrendű nyelvek

**7.1. Definíció.** Az  $\Omega = \langle \mathcal{Srt}, \mathcal{Cnst}, \mathcal{Fn}, \mathcal{Pr} \rangle$  komponensekből álló rendezett négyest **elsőrendű nyelvnek** nevezzük, ha teljesülnek a következők:

- a.)  $\mathcal{Srt}$  egy nem üres halmaz, elemei a nyelv típusai. Minden  $\pi \in \mathcal{Srt}$  típushoz szimbólumok megszámlálható rendszere tartozik, melyeket  $\pi$  típusú változóknak nevezünk. Ezek:  $x_1^\pi, x_2^\pi, \dots$  vagy csak egyszerűen:  $x_1, x_2, \dots$
- b.)  $\mathcal{Cnst}$  az  $\Omega$  nyelv konstansainak a halmaza (lehet üres halmaz is). Minden  $c \in \mathcal{Cnst}$  konstansnak valamely  $\pi$  típushoz kell tartoznia.
- c.)  $\mathcal{Fn}$  az  $\Omega$  nyelv függvényszimbólumainak (függvényjeleinek) halmaza (lehet üres halmaz is). Minden  $f \in \mathcal{Fn}$  függvényjelnek meg kell adni az alakját. Azaz  $f^{(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \rightarrow \pi)}$  ahol  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \pi \in \mathcal{Srt}$  típusok és  $n > 0$ . Ekkor  $f$ -t  $n$ -változós függvényszimbólumnak nevezzük.
- d.)  $\mathcal{Pr}$  nem üres halmaz, az  $\Omega$  nyelv predikátumszimbólumainak (predikátumbetűinek) halmaza. Minden  $P \in \mathcal{Pr}$  predikátumszimbólumhoz hozzárendeljük az alakját, azaz  $P^{(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)}$  ahol  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \in \mathcal{Srt}$  típusok és  $n \geq 0$ . Ekkor  $P$ -t  $n$ -változós predikátumszimbólumnak nevezzük. Ha  $n = 0$ , úgy a nullváltozós predikátumbetűt propozicionális betűnek is nevezzük.

*Példa:* Elsőrendű logikai nyelvre

- a.) A  $\mathcal{Geom}$  nyelv:

$$\mathcal{Srt} := \{pt, et, st\},$$

a  $pt$  típushoz tartozó változók:  $A, B, C, \dots$ ,

az  $et$  típushoz tartozó változók:  $a, b, c, \dots$ ,

az  $st$  típushoz tartozó változók:  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ,

$$\mathcal{Cnst} := \emptyset \text{ (konstans nincs),}$$

$$\mathcal{Fn} := \emptyset \text{ (függvényszimbólum nincs),}$$

$$\mathcal{Pr} := \{P^{(pt,pt)}, Q^{(pt,et)}, R^{(pt,st)}\}.$$

- b.) Az  $\mathcal{Ar}$  nyelv:

$$\mathcal{Srt} := \{szt\},$$

az  $szt$  típushoz tartozó változók:  $x, y, z, \dots$ ,

$$\mathcal{Cnst} := \{c\} \text{ (konstans a } c\text{),}$$

$$\mathcal{Fn} := \{f^{(szt \rightarrow szt)}, g^{(szt, szt \rightarrow szt)}, h^{(szt, szt \rightarrow szt)}\},$$

$$\mathcal{Pr} := \{P^{(szt, szt)}\}.$$

*Példa:* Fogalmazza meg a következő mondatot a  $\mathcal{Ar}$  nyelvben!

Egy szám pontosan akkor osztható 6-al, ha osztható 3-al és 2-vel is.

*Megjegyzés:* A példaként megadott nyelvekben még csak szimbólumaink vannak, a szimbólumokat majd jelentéssel fogjuk feltölteni (lásd a következő fejezetet, a nyelv interpretációját). Így az előző példa mondatát majd csak akkor tudjuk felírni a  $\mathcal{Ar}$  nyelvben.

*Példa:* logikai nyelvre

- a.) nullad-rendű logikai nyelv (a kijelentéslogika nyelve)

$$\Omega = \langle \emptyset, \emptyset, \emptyset, \mathcal{Pr} \rangle$$

és minden  $P \in \mathcal{Pr}$  predikátumbetű proposicionális betű. (Tehát, nincsenek típusok, konstansok és függvénytípusok. Valamint minden predikátumbetű nullváltozós, azaz kijelentésváltozó.)

## 7.2. Definíció. (Induktív definíció) az $\Omega$ nyelv $\pi$ típusú termjei.

*Bázis:*

- a.) Az  $\Omega$ -nyelv minden  $\pi$  típusú változója  $\pi$  típusú term.  
 b.) Az  $\Omega$ -nyelv minden  $\pi$  típusú konstansa  $\pi$  típusú term.

*Indukciós lépés:*

- c.) Ha  $f \in \mathcal{Fn}$  és az  $f$  függvénytípus alakja  $f^{(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \rightarrow \pi)}$  és  $t_i$  pedig  $\pi_i$  típusú termek ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) akkor

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

$\pi$  típusú term.

*Megjegyzés:* Minden term a következő két alak egyikét veszi fel.

- A.) Az  $\Omega$  nyelv konstansa vagy változója.  
 B.) Az indukciós lépés véges sokszori alkalmazásával nyert termek.

*Példa:* Az  $\mathcal{A}r$  nyelv néhány termje:

$x, y, z, \dots$   
 $f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots, f(y), f(f(y)), f(f(f(y))), \dots$   
 $c, f(c), f(f(c)), f(f(f(c))), \dots$   
 $g(x, x), g(x, y), g(x, z), \dots, g(x, f(x)), g(x, f(y)), g(x, f(z)), \dots$   
 $h(x, x), h(x, y), h(x, z), \dots, h(x, f(x)), h(x, f(y)), h(x, f(z)), \dots$   
 $h(g(x, y), g(c, f(c))), \dots$

Az utóbbi term felépülése az induktív definícióval:

$$\begin{array}{cccc}
 & & h(g(x, y), g(c, f(c))) & \\
 & & & g(c, f(c)) \\
 & g(x, y) & & f(c) \\
 \text{Bázis: } x & & y & & c & & c
 \end{array}$$

*Példa:* A  $\mathcal{G}eom$  nyelv termjei:  $A, B, C, \dots, a, b, c, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots$

Nincs több term, mert nincs konstans, és nincsenek függvények.

**7.3. Definíció.** (Az  $\Omega$  nyelv atomi formulái) Ha a  $P \in \mathcal{P}r$  predikátumbetű alakja  $P^{(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)}$  és  $t_i$  pedig  $\pi_i$  típusú termek ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) akkor

$$P(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

kifejezést **atomi formulának** nevezzük.

Speciálisan, ha  $P$  propozicionális betű, úgy atomi formula.

*Példa:* Az  $\mathcal{A}r$  nyelv néhány atomi formulája:

$P(x, c), P(x, x), P(x, y), P(x, z), \dots$   
 $P(x, f(c)), P(x, f(x)), P(x, f(y)), P(x, f(z)), \dots$   
 $P(f(x), c), P(f(x), x), P(f(x), y), P(f(x), z), \dots$   
 $P(g(x, y), h(x, c)), \dots$

*Példa:* A  $\mathcal{G}eom$  nyelv néhány atomi formulája:

$P(A, A), P(A, B), P(A, C), \dots, P(B, A), P(B, B), P(B, C), \dots$   
 $Q(A, a), Q(A, b), Q(A, c), \dots, Q(B, a), Q(B, b), Q(B, c), \dots$   
 $R(A, \alpha), R(A, \beta), R(A, \gamma), \dots, R(B, \alpha), R(B, \beta), R(B, \gamma), \dots$



Az  $\Omega$  nyelv szimbólumai:  
 Logikai összekötőjelek:

jele	neve	jelentése
$\wedge$	konjunkció	„és”
$\vee$	diszjunkció	„vagy”
$\neg$	negáció	„nem igaz, hogy ...”
$\supset$	implikáció	„ha ..., akkor ...”

Kvantorok:

jele	neve	jelentése
$\forall$	univerzális kvantor	„minden”
$\exists$	egzisztenciális kvantor	„létezik”

**7.4. Definíció.** (Induktív definíció) az  $\Omega$  nyelv formulái.

Bázis:

a.) Minden atomi formula az  $\Omega$  nyelv formulája.

Indukciós lépés:

b.) Ha  $A$  és  $B$  az  $\Omega$  nyelv formulája, akkor

$$(A \wedge B), (A \vee B), (A \supset B), \neg A$$

is az  $\Omega$  nyelv formulája.

c.) Ha  $A$  formula és  $x$  tetszőleges változó az  $\Omega$  nyelvben, akkor a

$$\forall x A, \exists x A$$

kifejezések szintén formulák az  $\Omega$  nyelvben.

Megjegyzés: Minden formula a következő két alak egyikét veszi fel.

A.) Az  $\Omega$  nyelv atomi formulája.

B.) Az indukciós lépés véges sokszori alkalmazásával nyert formulák.

Példa: Formula-e az  $\mathcal{A}$  nyelvben?

$$(P(x, c) \supset P(c, f(c))) \quad (\text{Nem, zárójel párja hiányzik.})$$

$$(P(x, c) \supset P(c, f(c))) \wedge \exists x \quad (\text{Nem, mert a kvantor után formulát kell írni, az hiányzik.})$$

$\exists xP(x)$  (Nem, mert  $A$  kétváltozós predikátumbetű.)

$\exists P(x, x)$  (Nem, mert a kvantornak nincs változója.)

$\exists x, yP(x, x)$  (Nem, mert a kvantornak csak egy változója lehet.)

$(P(x, c) \supset P(c, f(c))) \wedge \exists xP(x, f(c))$  (Nem, külső zárójel hiányzik. Megállapodás szerint viszont formula lesz, ha kirakjuk a külső zárójeleket.)

Ez utóbbi azért formula, mert felépíthető az induktív definícióval.

Építsük fel az induktív definícióval!

$$((P(x, c) \supset P(c, f(c))) \wedge \exists xP(x, f(c)))$$

$$(P(x, c) \supset P(c, f(c))) \qquad \exists xP(x, f(c))$$

$$\text{Bázis: } P(x, c) \qquad P(c, f(c)) \qquad P(x, f(c))$$

**7.5. Definíció.** *A termek és a formulák az  $\Omega$  nyelv kifejezései.*

*Az  $A$  formula minden olyan részét, amely maga is formula az  $A$  formula **részformulájának** nevezzük.*

*A  $t$  term minden olyan részét, amely maga is term a  $t$  term **résztermjének** nevezzük.*

*Példa:*  $\forall x(A(x) \wedge \neg\exists yB(y))$  formula részformulái:

$$A(x), B(y), \exists yB(y), \neg\exists yB(y), (A(x) \wedge \neg\exists yB(y)), \forall x(A(x) \wedge \neg\exists yB(y))$$

Más jelsorozatokat nem részformulák.

**7.6. Definíció.** *(szemantikai definíció) Egy  $A$  formulában szereplő logikai szimbólumok számát **logikai összetettségnek** nevezzük és  $l(A)$ -val jelöljük. Minden atomi formula logikai összetettsége 0.*

*Egy  $t$  termben szereplő függvényszimbólumok számát a  $t$  term **funkcionális összetettségnek** nevezzük és  $\tilde{l}(t)$ -vel jelöljük. Minden konstans, változó funkcionális összetettsége 0.*

*Megjegyzés:* A logikai összetettség, s a funkcionális összetettség fogalma induktív definícióval is megadható. (Lásd előadás.)

Megállapodások rövidítésekről:

- Használjuk a kijelentés logika rövidítéseit.

- a logikai jelek prioritása növekvő sorrendben:

$$\begin{array}{cc} \wedge & \forall \\ \equiv \supset & \neg \\ & \vee \quad \exists \end{array}$$

*Példa:* Motivációs feladat:  $S(x, y)$  kétváltozós predikátumbetű, jelentése:  $x$  szereti  $y$ -t. Mit jelentenek a következő mondatok?

$\forall x \exists y S(x, y)$  - Mindenki szeret valakit (kijelentés, zárt mondat).

$\forall z \exists y S(z, y)$  - Mindenki szeret valakit (kijelentés, zárt mondat).

$\forall x S(x, y)$  - Mindenki szereti  $y$ -t (nyitott mondat, egyváltozós).

$\exists y S(x, y)$  - Az  $x$  szeret valakit (nyitott mondat, de egyváltozós).

$S(x, y)$  -  $x$  szereti  $y$ -t (nyitott mondat, kétváltozós)

Mi történt itt? Ezt a kérdést szeretnénk a következőekben megválaszolni.

**7.7. Definíció.** A  $\forall x A$ ,  $\exists x A$  formulákban a  $\forall x$ ,  $\exists x$  jelsorozatot **kvantoros előtag**nak, az  $x$  változót a **kvantoros előtag változójának**, az  $A$  formulát a **kvantoros előtag hatáskörének** nevezzük.

**7.8. Definíció.** (szemantikai definíció) Azt mondjuk, hogy egy változó egy formulában **kötött előfordulású**, ha szerepel egy rajta ható kvantor hatáskörében. Egy változó valamely előfordulását egy formulában **szabadnak** nevezzük, ha nem kötött.

Egy változó a formula paramétere (szabad változója), ha van legalább egy szabad előfordulása.

Jelölés:  $\mathcal{Fv}(A)$  az  $A$  formula szabad változóinak halmaza.

*Megjegyzés:* A változó kötött és szabad előfordulása fogalom induktív definícióval is megadható. (Lásd előadás.)

Egy változó egy formulában több helyen is szerepelhet, egyes előfordulások szabadok, más előfordulások pedig kötöttek lesznek.

*Példa:* A  $\forall x(P(x) \vee Q(y))$  formulában a  $\forall x$  kvantoros előtag hatásköre a  $(P(x) \vee Q(y))$  részformula, így  $x$  előfordulása kötött lesz, míg  $y$  előfordulása szabad lesz.

**7.9. Definíció.** Az  $\Omega$  nyelv szabad változót tartalmazó formuláit **nyitott formuláknak**, szabad változót nem tartalmazó formuláit **zárt formuláknak**, **mondatoknak** nevezzük.

**7.10. Definíció.** Ha egy formulában egy változó kötött, akkor át lehet jelölni, ha az átjelölés után egyetlen részformula szabad változója sem válik kötötté. Ilyenkor **szabályosan végrehajtott kötött változó átjelölésről** beszélünk.

Ha az  $A$  és az  $A'$  formulák csak szabályosan végrehajtott kötött változó átjelölésben különböznek egymástól, akkor **kongruens formuláknak** nevezük őket, ill. azt is mondjuk, hogy  $A$  az  $A'$  **variánsa**.

Jelölés:  $A \approx A'$ .

*Példa:* A  $\forall x(P(x) \vee Q(y))$  formula kötött változó átjelölései (vegyük észre, hogy  $x$  kötött változó és  $y$  szabad változó, így csak  $x$ -t tudjuk átjelölni):

- a.)  $\forall y(P(y) \vee Q(y))$  nem szabályosan végrehajtott kötött változó átjelölés ( $y$  változó szabad volt, s kötött lett, így most  $y$  mindkét előfordulása kötött).
- b.)  $\forall z(P(z) \vee Q(y))$  szabályosan végrehajtott kötött változó átjelölés. (Vegyük észre, hogy  $y$  változó szabad maradt!)

**7.11. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy formula **változó-tiszta**, ha benne a kvantorok különböző változókat kötnek meg és a kötött változók különböznek a szabad változóktól.

*Példa:* Az előbbi  $\forall x(P(x) \vee Q(y))$  formula változó-tiszta, de az átjelöléssel kapott  $\forall z(P(z) \vee Q(y))$  formula is az.

*Megjegyzés:* Szabályosan végrehajtott kötött változó átjelöléssel mindig tudunk változó-tiszta alakot kapni.

**7.12. Definíció.** A **formális helyettesítést** megadhatjuk táblázattal

$$\Theta := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix},$$

ahol a felső sorban változók, az alsó sorban termek szerepelnek. A  $\Theta$  helyettesítés során az  $x_i$  változóba helyettesítjük a  $t_i$  termet.

A  $\Theta$  helyettesítés értelmezési tartománya:  $\text{Dom } \Theta := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,

a  $\Theta$  helyettesítés értékészlete:  $\text{Rng } \Theta := \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ .

*Megjegyzés:* A formális helyettesítést induktív definícióval adjuk meg (lásd előadás).

Fontos, hogy csak szabad változóba helyettesíthetünk.

**7.13. Definíció.** A  $\Theta$  helyettesítés **megengedett** a  $K$  kifejezés számára, ha a helyettesítés után a helyettesített termek egyetlen szabad változója sem válik kötötté.

Ha az  $A$  formula esetén egy helyettesítés nem megengedett, akkor az  $A$  formula valamely  $A'$  variánsával megengedetté tehető. Ekkor **szabályos helyettesítésről** beszélünk. Jelölés:  $[A\Theta]$ .

*Példa:* A következő helyettesítés megengedett-e? Ha nem akkor végezzen szabályos helyettesítést!

$$(\forall x A(x, y) \wedge B(x)) \left( \begin{array}{cc} x & y \\ f(x, y) & g(x, z) \end{array} \right)$$

Az  $x$  első előfordulása kötött így oda nem helyettesíték,  $y$ -ba és  $x$  második előfordulásába helyettesítem a megadott termeket. Látható, hogy ha  $y$ -ba behelyettesítem a  $g(x, z)$  termet, akkor annak az  $x$  változója kötötté válik, mert az univerzális kvantor megköti. Tehát a megadott helyettesítés nem megengedett.

Szabályos helyettesítést hajtunk végre, ennek során az  $x$  kötött változót átjelöljük  $w$  változóra, majd ezután helyettesítünk.

$$(\forall w A(w, y) \wedge B(x)) \left( \begin{array}{cc} x & y \\ f(x, y) & g(x, z) \end{array} \right) \sim (\forall w A(w, g(x, z)) \wedge B(f(x, y))).$$

## 8. A nyelv szemantikája

**8.1. Definíció.** Adott egy  $\Omega$  elsőrendű nyelv. Az  $\Omega$  **nyelv hordozója** egy olyan  $\mathcal{D}$  függvény, amely minden  $\pi \in \mathcal{Srt}$  típushoz hozzárendel egy nem üres  $\mathcal{D}_\pi$  halmazt, melyet a  $\pi$  típus **objektum tartományának** nevezünk. ( $\mathcal{D}_\pi$  nem más mint a  $\pi$ -típusú változók lehetséges értékeinek a halmaza, azaz a  $\pi$  típusú „objektumok” halmaza.)

**8.2. Definíció.** Az  $\Omega$  elsőrendű nyelv  $I$  **interpretációja (modellje)** az  $I := \langle \mathcal{D}, \hat{\mathcal{C}}nst, \hat{\mathcal{F}}n, \hat{\mathcal{P}}r \rangle$  négyes, amely teljesíti a következőket:

- a.)  $\mathcal{D}: \pi \mapsto \mathcal{D}_\pi$ , tehát a nyelv hordozója  $\mathcal{D}$ , minden  $\pi$  típushoz hozzárendeli az objektum tartományát  $\mathcal{D}_\pi$ -t.
- b.)  $\hat{\mathcal{C}}nst: c \mapsto \hat{c}$ , azaz minden  $c \in \mathcal{C}nst$   $\pi$  típusú konstansnak megfelel egy  $\hat{c} \in \mathcal{D}_\pi$   $\pi$  típusú objektumot.
- c.)  $\hat{\mathcal{F}}n: f \mapsto \hat{f}$ , azaz minden  $f \in \mathcal{F}n$  függvénytípusnak egy konkrét  $\hat{f}$  függvényt feleltet meg. Azaz, ha az  $f$  alakja  $f^{(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \rightarrow \pi)}$  úgy

$$\hat{f}: \mathcal{D}_{\pi_1} \times \mathcal{D}_{\pi_2} \times \dots \times \mathcal{D}_{\pi_n} \rightarrow \mathcal{D}_\pi$$

alakú konkrét függvény.

- d.)  $\hat{\mathcal{P}}r: P \mapsto \hat{P}$ , azaz minden  $P \in \mathcal{P}r$  predikátumszimbólumnak egy konkrét  $\hat{P}$  predikátumot feleltet meg. Azaz, ha az  $P$  alakja  $P^{(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)}$  úgy

$$\hat{P}: \mathcal{D}_{\pi_1} \times \mathcal{D}_{\pi_2} \times \dots \times \mathcal{D}_{\pi_n} \rightarrow \{0, 1\}$$

alakú konkrét függvény. Ha  $P$  proposicionális betű, akkor  $\hat{P}$  vagy 0 vagy 1.

*Megjegyzés:* A nyelv modellje vagy interpretációja a nyelv szimbólumait (jeleit) valódi tartalommal (jelentéssel) tölti fel.

A 0, 1 szimbólumokat **logikai értékeknek** nevezzük, használjuk még a **hamis, igaz** elnevezéseket is.

*Példa:*

- a.) A  $\mathcal{G}eom$  nyelv modellje (a szimbólumokat jelentéssel töltjük fel):  
a nyelv hordozójának  $\mathcal{D}$ -nek a megadása:  
 $\mathcal{D}_{pt} \Rightarrow$  a tér pontjainak halmaza,  
 $\mathcal{D}_{et} \Rightarrow$  a tér egyeneseseinek halmaza,  
 $\mathcal{D}_{st} \Rightarrow$  a tér síkjainak halmaza.

$\hat{C}nst, \hat{\mathcal{F}}n$  nincs, mert  $Cnst = \mathcal{F}n = \emptyset$  volt.

$\hat{\mathcal{P}}r$  megadása:

$\hat{P}(A, B) \Leftrightarrow (A = B)$  azaz az  $A$  pont egyenlő a  $B$  ponttal,

$\hat{Q}(A, e) \Leftrightarrow (A \in e)$  azaz az  $A$  pont az  $e$  egyenesen van,

$\hat{R}(A, \alpha) \Leftrightarrow (A \in \alpha)$  azaz az  $A$  pont az  $\alpha$  síkon van.

b.) A  $\mathcal{A}r$  nyelv  $\mathbb{N}$  modellje:

a nyelv hordozójának  $\mathcal{D}$ -nek a megadása:

$\mathcal{D}_{szt} \Leftrightarrow \mathbb{N}$  a természetes számok halmaza,

$\hat{C}nst$  megadása:

$\hat{c} \Leftrightarrow 0 \in \mathbb{N}$  a nulla természetes szám, melyet egyszerűen csak 0-val is szoktunk jelölni (a 0 szimbólumhoz gyermekkorunkban hozzárendelték a nulla számot).

$\hat{\mathcal{F}}n$  megadása:

$\hat{f}(x) \Leftrightarrow Sx$  azaz az  $x$  rákövetkezője „ $x + 1$ ” (de ez csak idézőjelben, mert 1 sincs csak  $S0$ ),

$\hat{g}(x, y) \Leftrightarrow x + y,$

$\hat{h}(x, y) \Leftrightarrow x \cdot y.$

$\hat{\mathcal{P}}r$  megadása:

$\hat{P}(x, y) \Leftrightarrow (x = y)$  azaz az  $x$  természetes szám egyenlő az  $y$  természetes számmal.

*Megjegyzés:* Az  $\mathcal{A}r$  nyelvnek más modellje is van például a  $\mathcal{D}_{szt} \Leftrightarrow \mathbb{Z}$  (vagy  $\mathbb{R}$ )-t is írhattunk volna.

**8.3. Definíció.**  $Cnst(D) \Leftrightarrow Cnst \cup (\cup_{\pi \in Srt} \mathcal{D}_\pi)$  segítségével új nyelv adható meg, ez

$$\Omega(\mathcal{D}) \Leftrightarrow \langle Srt, Cnst(D), Fn, Pr \rangle .$$

*Megjegyzés:* Az  $\Omega(\mathcal{D})$  az  $\Omega$ -tól, csak új konstansok jelenlétében különbözik. Például az  $\mathcal{A}r$  nyelvben most már leírhatjuk azt, hogy 2, eddig csak azt írhattuk le, hogy  $SS0$ .

Motivációs feladat: Tekintsük az  $\mathcal{A}r$  nyelv  $\mathbb{N}$  interpretációját. Milyen objektum lesz a  $\mathcal{D}_{szt} = \mathbb{N}$ -ben a következő term.

a.)  $(SSSS0 + SS0) \cdot SS0$

Ez a term a 12 természetes számot jelöli.

b.)  $SSSS0 + x$

A  $4 + x$  nem jelöl természetes számot (nem objektum a  $\mathcal{D}_{szt}$ -ben).

**8.4. Definíció.** (Induktív definíció) az  $\Omega$  nyelv értékelt termjei. Legyen adott az  $\Omega$  nyelv egy  $I$  interpretációja, a  $t$  term  $I$ -beli értékét jelölje  $|t|_I$ . Ha a  $t$  típusa  $\pi$ , úgy  $|t|_I$  a  $\mathcal{D}_\pi$  objektum tartomány egy objektuma.

Bázis:

a.) Ha  $c \in Cnst$ , úgy  $|c|_I \hat{=} \hat{c}$ .

b.) Ha  $a \in \mathcal{D}_\pi$ , úgy  $|a|_I \hat{=} a$ .

Indukciós lépés:

c.) Ha a term alakja  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  ahol a  $t_1, t_2, \dots, t_n$  már értékelt termek, a  $|t_1|_I, |t_2|_I, \dots, |t_n|_I$  értékekkel, úgy

$$|f(t_1, t_2, \dots, t_n)|_I \hat{=} \hat{f}(|t_1|_I, |t_2|_I, \dots, |t_n|_I).$$

*Példa:* Korábban felépítettük az  $\mathcal{A}r$  nyelvben a  $h(g(x, y), g(c, f(c)))$  termet. Mi a jelentése az  $\mathcal{A}r$  nyelv  $\mathbb{N}$  interpretációjában?

$$\begin{array}{cccc} & & (x + y)(0 + S0) & \\ & & & (0 + S0) \\ & (x + y) & & S0 \\ \text{Bázis: } x & & y & 0 \\ & & & 0 \end{array}$$

*Megjegyzés:* Változót tartalmazó termet nem lehet értékelni. Az előző példánkban is ez történik  $(0 + S0)$  értéke 1, de  $(x + y)$ -nak nincs értéke, így a termnek sincs értéke.

Motivációs feladat: Tekintsük az  $\mathcal{A}r$  nyelv  $\mathbb{N}$  interpretációját. Mi lesz a következő formulák logikai értéke?

a.)  $\exists x((x + SS0) = SSSS0)$

b.)  $\exists x((x + SSSS0) = SS0)$

c.)  $((x + SS0) = SSSS0)$

d.) Az  $SSSSS0$  szám páros.

Az a.) formula igaz, a b.) formula hamis, a c.) formulának nincs logikai értéke, a d.) formula hamis. Vegyük észre, hogy a c.) formula nyitott mondat, az a.) b.) d.) formulák zárt mondatok, ez utóbbiaknak tudtuk megmondani a logikai értékét.

*Megjegyzés:* Vegyük észre, hogy a formula logikai értéke függ az interpretációtól. Az  $\mathcal{A}r$  nyelv  $\mathbb{Z}$  interpretációjában a b.) mondat igaz lesz, míg a  $\mathbb{N}$  interpretációban hamis volt.



**8.5. Definíció.** (Induktív definíció) az  $\Omega$  **nyelv értékelt formulái**. Legyen adott az  $\Omega$  nyelv egy  $I$  interpretációja. Ha az  $A$  az  $I$ -ben értékelt formula akkor értékét  $|A|_I$ -vel jelöljük ( $|A|_I = 1$  vagy  $|A|_I = 0$ ). Az  $|A|_I = 1$ -t  $I \models A$ -val is jelöljük.

Bázis:

a.) Ha az  $A$  formula atomi formula, azaz  $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$  alakú, ahol a  $t_1, t_2, \dots, t_n$  már értékelt termek, a  $|t_1|_I, |t_2|_I, \dots, |t_n|_I$  értékekkel, úgy

$$|P(t_1, t_2, \dots, t_n)|_I \Leftrightarrow \hat{P}(|t_1|_I, |t_2|_I, \dots, |t_n|_I).$$

Valamint,  $\hat{P}(|t_1|_I, |t_2|_I, \dots, |t_n|_I) = 1$  esetén azt mondjuk, hogy az atomi formula igaz  $I$ -ben, ellenkező esetben ( $\hat{P}(|t_1|_I, |t_2|_I, \dots, |t_n|_I) = 0$ ) azt mondjuk, hogy az atomi formula hamis  $I$ -ben.

Indukciós lépés:

b.)  $|A \wedge B|_I = 1$  pontosan akkor, ha  $|A|_I = 1$  és  $|B|_I = 1$  egyszerre teljesül.

c.)  $|A \vee B|_I = 1$  pontosan akkor, ha  $|A|_I = 1$  vagy  $|B|_I = 1$  közül legalább az egyik teljesül.

d.)  $|A \supset B|_I = 0$  pontosan akkor, ha  $|A|_I = 1$  és  $|B|_I = 0$  egyszerre teljesül,

e.)  $|\neg A|_I = 1$  pontosan akkor, ha  $|A|_I = 0$ ,

f.)  $|\forall x A|_I = 1$  (ahol  $x$   $\pi$  típusú változó) pontosan akkor, ha minden  $a \in \mathcal{D}_\pi$  esetén  $\left| A \left( \begin{smallmatrix} x \\ a \end{smallmatrix} \right) \right|_I = 1$ ,

g.)  $|\exists x A|_I = 1$  (ahol  $x$   $\pi$  típusú változó) pontosan akkor, ha van olyan  $a \in \mathcal{D}_\pi$ , hogy  $\left| A \left( \begin{smallmatrix} x \\ a \end{smallmatrix} \right) \right|_I = 1$ .

Megjegyzés:

a.) Nyitott mondatot nem értékelünk.

b.) Az induktív definícióban meghatározott logikai értékek összhangban vannak a korábban tanultakkal. Lásd a *Kijelentés logika és Predikátum logika* című fejezeteket!

## 9. Logikai törvények

**9.1. Definíció.** Az  $\Omega$  nyelv egy  $A$  formulája logikai törvény vagy azonosan igaz formula, vagy tautológia, ha  $A$  igaz az  $\Omega$  nyelv minden interpretációjában, minden értékelés esetén.

Jelölés:  $\models A$ .

Az  $A$  formula logikailag ellentmondásos, vagy kontradikció, ha minden interpretációban, minden értékelés esetén hamis.

Az  $A$  formula kielégíthető, ha van olyan  $I$  modell és abban olyan értékelés, amelynél  $A$  igaz.

Az  $A$  és  $B$  formulák logikailag ekvivalensek, ha az  $(A \equiv B)$  formula logikai törvény.

Jelölés:  $A \sim B$ .

**9.2. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $\Omega$  nyelv  $A$  formulája az  $A_1, A_2, \dots, A_k$   $\Omega$ -beli formulák Boole-kombinációja, ha az  $A$  formula az  $A_1, A_2, \dots, A_k$  formulákból épül fel a  $\wedge, \vee, \supset, \neg$  logikai jelek segítségével, kvantorok alkalmazása nélkül (azonban  $A_1, A_2, \dots, A_k$ -ban szerepelhetnek kvantorok).

Megjegyzés:

- Az  $A_1, \dots, A_k$  formulák tartalmazhatnak kvantorokat.
- A kijelentéslogika minden formulája Boole-kombináció.
- Az  $A_1, \dots, A_k$  komponensek logikai értéke egyértelműen meghatározza a Boole-kombináció logikai értékét, ezt a formula Quine-féle táblázatából is le lehet olvasni. Az  $A_1, A_2, \dots, A_k$  formulák alatt kiírjuk a 0 és 1 összes lehetséges kombinációját, ez  $2^k$  sor. Ez után sorra elvégezzük a logikai műveleteket.

*Példa:*  $\forall xA(x) \vee \exists yB(y)$  formula Boole-kombináció, melynek komponensei:  $\forall xA(x), \exists yB(y)$ .

**9.3. Definíció.** Az olyan Boole-kombinációt, amelyhez tartozó Quine-féle táblázatban a főoszlop csupa egyesekből áll propozicionális tautológiának nevezük.

**9.1. Lemma.** Ha egy Boole-kombináció propozicionális tautológia, akkor logikai törvény.

*Megjegyzés:* A fentiek összhangban vannak a korábban tanultakkal, a kijelentéslogika törvényei Boole-kombinációk, sőt propozicionális tautológiák. Így most is logikai törvények lesznek.

További logikai törvények:

Jelölés: A továbbiakban  $A(x)$ ,  $A(x, y)$  azt jelöli, hogy az  $x$  ill.  $y$  felléphet  $A$ -beli szabad változóként, de nem feltétlenül az.

Egynemű kvantorok cseréje:

$$45.) \quad \forall x \forall y A(x, y) \sim \forall y \forall x A(x, y),$$

$$46.) \quad \exists x \exists y A(x, y) \sim \exists y \exists x A(x, y).$$

Kvantor-csere implikációban:

$$47.) \quad \models \forall x A(x) \supset \exists x A(x),$$

$$48.) \quad \models \exists y \forall x A(x, y) \supset \forall x \exists y A(x, y).$$

De Morgan-féle kvantoros törvények:

$$49.) \quad \neg \forall x A(x) \sim \exists x \neg A(x),$$

$$50.) \quad \neg \exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x).$$

Kvantor kifejezése másik kvantorral:

$$51.) \quad \forall x A(x) \sim \neg \exists x \neg A(x),$$

$$52.) \quad \exists x A(x) \sim \neg \forall x \neg A(x).$$

Kvantorok egyoldali kiemelése (itt  $x$  nem szabad változó  $A$ -ban):

$$53.) \quad (A \wedge \forall x B(x)) \sim \forall x (A \wedge B(x)),$$

$$54.) \quad (A \vee \forall x B(x)) \sim \forall x (A \vee B(x)),$$

$$55.) \quad (A \wedge \exists x B(x)) \sim \exists x (A \wedge B(x)),$$

$$56.) \quad (A \vee \exists x B(x)) \sim \exists x (A \vee B(x)),$$

$$57.) \quad (A \supset \forall x B(x)) \sim \forall x (A \supset B(x)),$$

$$58.) \quad (A \supset \exists x B(x)) \sim \exists x (A \supset B(x)),$$

$$59.) \quad (\forall x B(x) \supset A) \sim \exists x (B(x) \supset A),$$

$$60.) \quad (\exists x B(x) \supset A) \sim \forall x (B(x) \supset A).$$

Kvantorok kétoldali kiemelése:

$$61.) (\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)) \sim \forall x (A(x) \wedge B(x)),$$

$$62.) (\exists x A(x) \vee \exists x B(x)) \sim \exists x (A(x) \vee B(x)),$$

$$63.) \models (\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \supset \forall x (A(x) \vee B(x)),$$

$$64.) \models \exists x (A(x) \wedge B(x)) \supset (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)).$$

Fiktív kvantorok törvénye ( $x$  nem szabad változó az  $A$ -ban):

$$65.) \forall x A \sim A,$$

$$66.) \exists x A \sim A.$$

Kongruens formulák ekvivalenciája:

$$67.) \text{Ha } A \approx B \text{ akkor } A \sim B.$$

Helyettesítéskor fellépő kvantorok:

$$68.) \models \forall x A \supset A \left( \begin{array}{c} x \\ t \end{array} \right),$$

$$69.) \models A \left( \begin{array}{c} x \\ t \end{array} \right) \supset \exists x A.$$

Kvantor-hatáskör átjelölés ( $x, y$  azonos típusú változó,  $y$  nem szabad változó  $A$ -ban):

$$70.) \forall x A \sim \forall y A \left( \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right),$$

$$71.) \exists x A \sim \exists y A \left( \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right).$$

Kvantor-redukció ( $x, y$  azonos típusú változó):

$$72.) \models \forall x \forall y A(x, y) \supset \forall x A(x, x),$$

$$73.) \models \exists x A(x, x) \supset \exists x \exists y A(x, y).$$

Helyettesítés ekvivalens formulákban:

$$74.) \text{Ha } A \sim B, \text{ akkor } A \left( \begin{array}{c} x \\ t \end{array} \right) \sim B \left( \begin{array}{c} x \\ t \end{array} \right).$$

Megjegyzés:

- a.)  $\forall xA(x) \supset \exists xA(x)$  formula Boole-kombináció, komponensei  $\forall xA(x)$ ,  $\exists xA(x)$ . Értéktáblázata:

$\forall xA(x)$	$\exists xA(x)$	$\forall xA(x) \supset \exists xA(x)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

A Boole-kombináció nem propozicionális tautológia (lásd 2. sor az értéktáblázatban), pedig logikai törvény. Az értéktáblázat nem veszi figyelembe a formula finom szerkezetét (jelentését).

Nevezetesen  $|\forall xA(x)|_I = 1$  és  $|\exists xA(x)|_I = 0$  egyszerre nem állhat fenn.

- b.) Ha kvantort tartalmazó formula értéktáblázatának főoszlopában csupa 1 áll, akkor propozicionális tautológia, tehát logikai törvény. Ha a főoszlop 0-t is tartalmaz, akkor nem tudunk nyilatkozni, a formula lehet logikai törvény és nem logikai törvény is.
- c.) Sokkal egyszerűbb egy formuláról megmutatni, hogy nem logikai törvény. Elég megadni egy  $I$  interpretációt és egy értékelést, amikor a formula hamis lesz.

*Példa:* Mutassuk meg, hogy a  $\forall xA(x) \supset \exists xA(x)$  formula logikai törvény!

Meg kell mutatnunk, hogy minden modellben és benne minden értékelésnél igaz lesz.

Rögzítsünk egy tetszőleges  $I$  interpretációt. Ekkor két lehetőség van  $|\forall xA(x)|_I = 0$  vagy  $|\forall xA(x)|_I = 1$ . Tárgyaljuk ezt a két esetet!

- a.  $|\forall xA(x)|_I = 0$  ebben az esetben  $\exists xA(x)$  logikai értékétől függetlenül

$$|\forall xA(x) \supset \exists xA(x)|_I = 1$$

az implikáció értelmezése miatt.

- b.  $|\forall xA(x)|_I = 1$ , azaz (feltéve, hogy  $x$  az  $\pi$  típusú változó) minden  $a \in \mathcal{D}_\pi$  objektum esetén  $\left| A \left( \begin{array}{c} x \\ a \end{array} \right) \right|_I = 1$ . A sok  $a$  objektumból egy  $a'$ -t kiválasztva, tudjuk mondani, hogy  $\left| A \left( \begin{array}{c} x \\ a' \end{array} \right) \right|_I = 1$ . Ebből van olyan  $a$

objektum amelyre  $\left| A \left( \begin{array}{c} x \\ a \end{array} \right) \right|_I = 1$  (mert  $a'$  ilyen). Tehát  $|\exists x A(x)|_I = 1$ .

Amiből

$$|\forall x A(x) \supset \exists x A(x)|_I = 1$$

azonnal adódik.

Mivel az  $I$  interpretáció tetszőleges volt, így kijelenthetjük, hogy minden  $I$  interpretációban végigvihető a fenti gondolatmenet.

*Példa:* Mutassuk meg, hogy a  $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \supset \exists x (A(x) \wedge B(x))$  formula nem logikai törvény (használjuk a c.) megjegyzést)!

Megadunk egy  $I$  interpretációt, amelyben a formula hamis lesz.

$I$  megadása:  $\mathcal{A}r$  nyelv  $\mathbb{N}$  interpretáció.

$A(x) \Leftrightarrow (SS0|x)$ , tehát  $x$  páros szám,  $B(x) \Leftrightarrow \neg(SS0|x)$ , tehát  $x$  páratlan szám.

Ekkor  $|\exists x A(x)|_I = 1$ ,  $|\exists x B(x)|_I = 1$  és  $|\exists x (A(x) \wedge B(x))|_I = 0$ , így  $|\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \supset \exists x (A(x) \wedge B(x))|_I = 0$ .

*Példa:* Mutassuk meg, hogy a  $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \supset \exists x (A(x) \wedge B(x))$  formula kielégíthető formula!

Megadunk egy olyan  $I$  interpretációt és benne olyan értékelést, amelyben a formula igaz lesz.

$I$  megadása:  $\mathcal{A}r$  nyelv  $\mathbb{N}$  interpretáció.

$A(x) \Leftrightarrow (SSS0|x)$ , tehát  $x$  osztható 3-al,  $B(x) \Leftrightarrow (SS0|x)$ , tehát  $x$  osztható 2-vel.

Ekkor  $|\exists x A(x)|_I = 1$  (hiszen a 3, 6, 9, ... osztható 3-al),  $|\exists x B(x)|_I = 1$  (hiszen a 2, 4, 6, ... osztható 2-vel) és  $|\exists x (A(x) \wedge B(x))|_I = 1$ , (a 6 olyan szám, amely osztható 3-al és 2-vel) így  $|\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \supset \exists x (A(x) \wedge B(x))|_I = 1$ .

## 10. Logikai törvények alkalmazása 2: prenex alak.

*Megjegyzés:* Korábban a logikai törvényeket diszjunktív normálformára és konjunktív normálformára hozásnál használtuk. A diszjunktív normálforma és konjunktív normálforma definíciójában a literál az atomi formula vagy a negáltja lesz az  $\Omega$  nyelvben. Így a korábbi lemmánk a következő alakban lesz érvényes az  $\Omega$  nyelvben.

**10.1. Lemma.** *Az  $\Omega$  nyelv minden kvantormentes formulája konjunktív normálformára ill. diszjunktív normálformára hozható, azaz logikailag ekvivalens valamely konjunktív normálformával ill. diszjunktív normálformával.*

*Megjegyzés:* Hasonlóan a kijelentés logikában megadott logikai következmény fogalmat meg adhatjuk kvantort tartalmazó formulákra is. A definíció a következő lesz.

**10.1. Definíció.** *Jelölje  $\Gamma$  az  $\Omega$  nyelv véges sok formulájának a halmazát,  $A$  pedig az  $\Omega$  nyelv egy formuláját. Azt mondjuk, hogy  $A$  logikai következménye (szemantikai következménye) a  $\Gamma$ -beli formuláknak (jelölés:  $\Gamma \models A$ ), ha az  $\Omega$  nyelv minden  $I$  interpretációjára, valamint az  $A$  és a  $\Gamma$ -beli formulák minden olyan értékelése esetén, amikor az  $\Gamma$ -beli formulák mindegyike igaz  $I$ -ben, akkor az  $A$  is igaz  $I$ -ben. Ha a  $\Gamma$  a  $B_1, B_2, \dots, B_n$  formulákból áll, úgy ezeket premisszáknak (feltételeknek), az  $A$ -t konklúzióknak (zárótételnek) nevezzük.*

**10.2. Definíció.** *Az  $\Omega$  nyelv egy  $Q_1x_1Q_2x_2\dots Q_nx_nA$  alakú formuláját, ahol  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  kvantorok ( $n \geq 0$ ) és  $A$  kvantormentes formula, prenex formulának nevezzük.*

*Speciálisan a kvantormentes formula is prenex formula (lásd  $n = 0$ ).*

**10.1. Tétel.** *Minden  $A$  formula prenex alakra hozható, azaz van olyan prenex formula, amellyel  $A$  logikailag ekvivalens.*

*Bizonyítás:* Algoritmust adunk meg, amellyel mindig prenex alakot kapunk.

- 1.) A formulát változó-tiszta alakra hozzuk.
- 2.) A kvantoros de Morgan törvényeket és a kvantorok egyoldali kiemelése törvényeket többször egymás után alkalmazva prenex formulát kapunk.

*Megjegyzés:* A kvantorok kiemelésének sorrendje változtatható, így a prenex alak kvantoros előtagja (prefixum) függ az átalakítás módjától.

*Példa:* Hozza prenex alakra a  $\neg\exists x\forall yP(x, y) \supset \exists x\forall yQ(x, y)$  formulát! Alkalmazzuk az algoritmust, figyeljünk a hiányzó zárójelekre!

$$\begin{aligned} \neg\exists x\forall yP(x, y) \supset \exists x\forall yQ(x, y) &\sim (\neg\exists x\forall yP(x, y) \supset \exists z\forall wQ(z, w)) \\ &\sim (\forall x\exists y\neg P(x, y) \supset \exists z\forall wQ(z, w)) \\ &\sim \exists z\forall w(\forall x\exists y\neg P(x, y) \supset Q(z, w)) \\ &\sim \exists z\forall w\exists x\forall y(\neg P(x, y) \supset Q(z, w)). \end{aligned}$$

Előbb hiányzó zárójelek, majd változó-tiszta alak szabályosan végrehajtott kötött változó átjelöléssel, majd kvantoros de Morgan törvények (52, 51 sorrendben), majd kvantorok egyoldali kiemelése (60, 59, 61, 62 sorrendben).



## 11. Gentzen-kalkulus

*Bevezetés:* A szintaktikailag felépített logikai rendszereket logikai kalkulusoknak is nevezzük, azaz logikai kalkulus nem más mint olyan formális rendszer, formális eljárás (szabályok gyűjteménye) melyek segítségével logikai törvényeket kapunk. Egy logikai kalkulus kiinduló *axiómákból és levezetési szabályokból* áll.

**11.1. Definíció.** Legyenek  $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$  és  $\Delta = \{B_1, \dots, B_m\}$  formula halmazok ( $n, m \geq 0$ ). Ekkor a

$$\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n \supset B_1 \vee \dots \vee B_m \vee \perp$$

formulát **sequentnek** nevezzük.

Jelölés:  $A_1, \dots, A_n \rightarrow B_1, \dots, B_m$ , röviden  $\Gamma \rightarrow \Delta$ .

Legyenek  $\Gamma$  és  $\Delta$  formulák halmaza (lehet üres halmaz is),  $A$  és  $B$  formulák,  $x, y$  azonos típusú változók,  $t$  az  $x$ -el azonos típusú term.

A Gentzen-kalkulus axiómasémái:

$$A, \Gamma \rightarrow \Delta, A$$

$$\perp, \Gamma \rightarrow \Delta$$

A Gentzen-kalkulus levezetési szabályai:

$$\begin{array}{ll} (\wedge \rightarrow) \frac{A, B, \Gamma \rightarrow \Delta}{(A \wedge B), \Gamma \rightarrow \Delta} & (\rightarrow \wedge) \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A; \quad \Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, (A \wedge B)} \\ (\vee \rightarrow) \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta; \quad B, \Gamma \rightarrow \Delta}{(A \vee B), \Gamma \rightarrow \Delta} & (\rightarrow \vee) \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, (A \vee B)} \\ (\supset \rightarrow) \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A; \quad B, \Gamma \rightarrow \Delta}{(A \supset B), \Gamma \rightarrow \Delta} & (\rightarrow \supset) \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, (A \supset B)} \\ (\neg \rightarrow) \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Delta} & (\rightarrow \neg) \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg A} \\ (\forall \rightarrow) \frac{A \left( \begin{array}{c} x \\ t \end{array} \right), \forall x A, \Gamma \rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \rightarrow \Delta} & (\rightarrow \forall) \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \left( \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right)}{\Gamma \rightarrow \Delta, \forall x A} \\ (\exists \rightarrow) \frac{A \left( \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right), \Gamma \rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \rightarrow \Delta} & (\rightarrow \exists) \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \left( \begin{array}{c} x \\ t \end{array} \right), \exists x A}{\Gamma \rightarrow \Delta, \exists x A} \end{array}$$

*Megjegyzés:*  $(\rightarrow \forall)$  és a  $(\exists \rightarrow)$  szabálynál  $y$  nem szabad változó  $\Gamma$ -ban és  $\Delta$ -ban.

**11.2. Definíció.** Egy sequentet a **Gentzen-kalkulusban levezethetőnek** nevezünk, ha

- a.) vagy axióma,
- b.) vagy van olyan levezetési szabály, amelyben a vonal alatti sequent, és a vonal feletti sequent (sequentek) levezethető (levezethetőek).

**11.3. Definíció.** Ha  $\Gamma \rightarrow A$ , akkor  $\Gamma \models A$  is teljesül (minden  $A$  formulára), akkor azt mondjuk, hogy a **kalkulus helyes** a szemantikus rendszerre nézve.

Ha  $\Gamma \models A$ , akkor  $\Gamma \rightarrow A$  is teljesül (minden  $A$  formulára), akkor azt mondjuk, hogy a **kalkulus teljes** a szemantikus rendszerre nézve.

Ha mind a kettő teljesül, akkor **adekvátnak** nevezzük.

**11.1. Tétel.** A Gentzen-kalkulus helyes és teljes.

**11.1. Következmény.**  $\Gamma \rightarrow A$  pontosan akkor, ha  $\Gamma \models A$ .

Ekkor  $\Gamma = \emptyset$ -t választva.

$\rightarrow A$  pontosan akkor, ha  $\models A$ .

*Példa:* Mutassuk meg, hogy a  $(A \supset B) \wedge (A \supset \neg B) \supset \neg A$  formula logikai törvény! Belátjuk, hogy a Gentzen-kalkulus levezethető sequentje.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{A}, B \rightarrow \mathbf{A} \text{ ax.séma} & & \mathbf{B} \rightarrow \neg \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ ax.séma} \\
 & (\rightarrow \neg) & (\neg \rightarrow) \\
 \mathbf{A}, (A \supset \neg B) \rightarrow \mathbf{A} \text{ ax.séma} & \text{bi.) } B \rightarrow \neg A, A & \text{bii.) } B, \neg B \rightarrow \neg A \\
 & (\rightarrow \neg) & (\supset \rightarrow) \\
 \text{a.) } (A \supset \neg B) \rightarrow \neg A, A & & \text{b.) } B, (A \supset \neg B) \rightarrow \neg A \\
 & (\supset \rightarrow) & \\
 & (A \supset B), (A \supset \neg B) \rightarrow \neg A & \\
 & (\wedge \rightarrow) & \\
 & ((A \supset B) \wedge (A \supset \neg B)) \rightarrow \neg A & \\
 & (\rightarrow \supset) & \\
 & \rightarrow ((A \supset B) \wedge (A \supset \neg B)) \supset \neg A & 
 \end{array}$$

## Irodalomjegyzék

- [1. ] Dragálin Albert, Buzási Szvetlána, Bevezetés a matematikai logikába, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 1997.
- [2. ] Pásztorné Varga Katalin, Várterész Magda, A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása, Panem Kiadó, Budapest 2003.
- [3. ] Sashalminé Kelemen Éva, A matematikai logika és a halmazelmélet elemei, EKTF Líceum Kiadó, Eger 1996.
- [4. ] Urbán János, Matematikai logika, Műszaki Könyvkiadó, 1983.
- [5. ] Ruzsa Imre, Logikai szintaxis és szemantika, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1988.