

Tanárképző főiskolák 2003. évi Péter Rózsa matematika versenyének feladatai

1. Hányféleképpen lehet az ötös lottón a 90 szám közül 5-öt megjelölni úgy, hogy ne legyenek köztük szomszédosak?

2. Az a valós paraméter mely értékeire van egyetlen olyan (x, y) valós számpár, amely kielégíti az

$$x^2 + y^2 - 4x + 2 \leq 0$$

egyenlőtlenséget és az

$$x - y + a = 0$$

egyenletet is?

3. Nevezzük szabályos *tér n -szögnek* a térbeli n -szöget, ha minden oldala egyenlő hosszúságú és a szomszédos oldalak ugyanakkora szöget zárnak be egymással. Milyen határok között változhat egy szabályos tér 4-szög egy szöge?

4. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív valós számok, akkor

$$\sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc} \geq \sqrt{a^2 + c^2 + ac}.$$

5. Határozza meg az összes olyan (a, b) valós számpárt, amelyekre az

$$x^4 - 12x^3 + ax^2 + bx + 81 = 0$$

egyenletnek négy pozitív valós gyöke van!

6. Legyen (a_n) a következő sorozat: $a_1 = c$ ($c \in \mathbf{R}$),

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{1+a_{n-1}}, & \text{ha } a_{n-1} \neq -1, \\ -1, & \text{ha } a_{n-1} = -1, \end{cases}$$

ha $n > 1$, egész. Milyen c esetén konvergens a sorozat és mennyi a határértéke?

7. Adott a síkon 400 pont, amelyek közül semelyik három sem esik egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy van olyan 100 darab páronként diszjunk négyszög, amelyeknek éppen az adott pontok a csúcsai. (Diszjunktnak nevezünk két négyszöget, ha - mint zárt négyszöglapok - nincs közös pontjuk.)

Nyíregyháza, 2003. április 24.