

Tanárképző főiskolák 2004. évi Péter Rózsa matematika versenyének feladatai

1. Legyen $A = 177\dots76$ ($2k + 1$ db hetes) $2k + 3$ jegyű és $B = 355\dots52$ (k db ötös) $k + 2$ jegyű természetes szám. Bizonyítsa be, hogy $\sqrt{A - B}$ is természetes szám és határozza meg a jegyeinek a számát!

2. Jelölje T az ABC háromszög M magasságpontjának a C csúcsból induló súlyvonalra eső merőleges vetületét. Bizonyítsa be, hogy T -nek az AB oldal felezőpontjára vonatkozó tükörképe az ABC háromszög köré írt körön van!

3. Az (a_n) sorozatot a következőképpen adtuk meg: $a_1 := 1$ és

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_{n+1} + a_n}, \quad \text{ha } n \geq 1.$$

Adja meg az a_n -t az n függvényeként!

4. Igazolja, hogy ha egy háromszög α és β szögére $\sin \alpha \neq \cos \beta$ és teljesül, hogy

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \beta - \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \beta},$$

akkor a háromszög egyenlőszárú!

5. Melyik az a legkisebb, 1-nél nagyobb n egész szám, amelyre igaz, hogy bárhogyan is helyezünk el n pontot az egységsugarú kör belsejében, mindig van a pontok között 2 olyan, amelynek távolsága kisebb, mint $\sqrt{2}$?

6. 8 versenyző körmérkőzést játszik (mindenki pontosan egyszer játszik mindenkiel) Döntetlen nincs. Bizonyítsa be, hogy mindig kiválasztható 4 olyan versenyző, akik közül az első legyőzte a másodikat, harmadikat és negyediket, a második legyőzte a harmadikat és negyediket, valamint a harmadik is legyőzte a negyediket!

7. Adott egy háromszög. Igazolja, hogy ha a háromszög nem szabályos, akkor van olyan, vele nem egybevágó egyenlőszárú háromszög, amelynek ugyanakkora a kerülete és a területe!

Eger, 2004. április 14.