b) Az f_2, f_6, g függvények mindegyike a $\mathbf{K}_i$ osztálynak eleme, a többi feltételt ezek is kielégítik, tehát ezek sem alkotnak teljes rendszert.

c) A $h \in \mathbf{U}$ miatt a h egyedül nem alkot teljes rendszert.

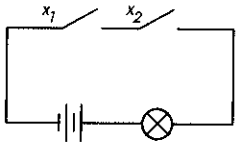
d) Az f_1, f_2, $f_{11} \in \mathbf{L}$ feltétel miatt ezek sem alkotnak teljes rendszert.

e) f_1, f_2, $f_6 \in \mathbf{M}$, tehát ez sem teljes rendszer.

III. A KIJELENTÉSLOGIKA ALKALMAZÁSAI

1. Logikai áramkörök, automaták

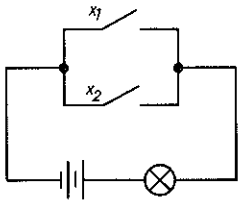
Gyakori feladat az, hogy adott elemekből olyan áramkört kell összeállítani, amely bizonyos jól meghatározott gyakorlati célt elégít ki. A legegyszerűbb esetekben kapcsolókból (esetleg több, egyszerre működtethető kapcsolóból) és áramforrásból, fogyasztókból kell összeállítani egy megadott feladatot ellátó áramkört. Az áramkör megtervezéséhez jól hasznosíthatjuk az ítéletkalkulus eszközeit. A 20. ábrán vázlatosan szemléltetett áramkör két, sorba kapcsolt kapcsolóból, egy áramforrásból és egy fogyasztóból – lámpából – áll.



20. ábra

Annak a feltétele, hogy az áramkörben áram folyjék az, hogy mindkét kapcsoló – az x_1 és az x_2 jelű is – bekapcsolt állapotban legyen. Legyen x_i értéke i akkor, ha az x_i ($i = 1, 2$) kapcsoló bekapcsolt állapotban van, h egyébként. Ekkor annak a feltétele, hogy a lámpa égjen, a következő módon írható fel egyszerű formában:

$$x_1 \wedge x_2.$$



21. ábra

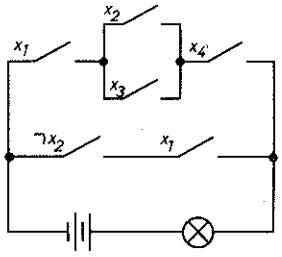
Ha a 21. ábrán vázolt áramkör működését akarjuk leírni röviden, akkor az előző jelölési megállapodásokat alkalmazva ezt kapjuk:

$$x_1 \vee x_2.$$

Gyakorló feladatok

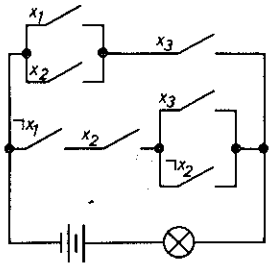
1. Írjuk fel annak feltételét, hogy a következő ábrákon látható áramkörökben áram folyjon! (A $\neg x_i$ jelű kapcsoló az x_i jelűvel éppen ellentétes működésű; két azonos jelű kapcsoló egyszerre van nyitva, ill. zárva).

a)



22. ábra

b)



23. ábra

Megoldás:

a) Használjuk fel az előző részben elmondottakat, amit röviden így lehet összefoglalni: a soros kapcsolás a konjunkciónak, a párhuzamos kapcsolás a diszjunkciónak felel meg. Ennek alapján a működési feltételt a következő formula írja le:

$$(x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge x_4) \vee (\neg x_2 \wedge x_1).$$

b) Az *a)* feladat megoldásához hasonlóan járhatunk el; eredményül a következő formulát kapjuk:

$$((x_1 \vee x_2) \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge (x_3 \vee \neg x_2)).$$

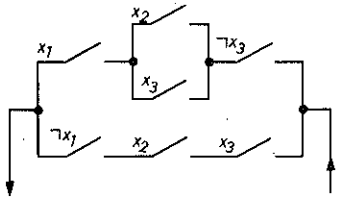
2. Tervezzünk olyan áramkört, amelyek a következő formuláknak felelnek meg:

a) $(x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$;

b) $((x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge \neg x_5) \vee ((\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge x_4) \vee$
$\vee (((x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_5) \wedge \neg x_1) \vee$
$\vee ((\neg x_3 \vee \neg x_5) \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_3 \wedge x_5))) \wedge x_4.$

Megoldás:

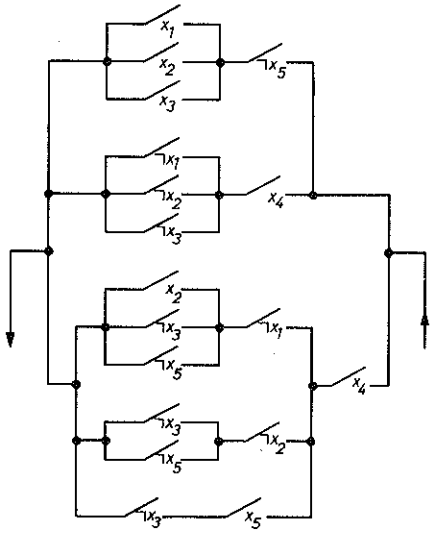
a) Azt az elvet követve, hogy a konjunkciónak a soros kapcsolás, diszjunkciónak a párhuzamos kapcsolás felel meg, megkonstruálhatjuk a kívánt áramkört (24. ábra).



24. ábra

(Az egyszerűsítés kedvéért itt már nem rajzoltuk be az áramforrást és a fogyasztót).

b) Hasonló módon járhatunk el, bár itt összetettebb lesz a kapott áramkör (25. ábra).



25. ábra

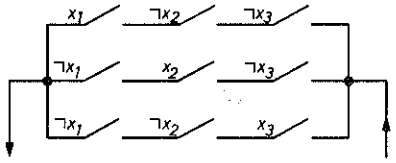
3. Egy hálókocsiban három fekvőhely van, mindhárom fekvőhelyhez egy-egy kapcsoló tartozik. A fülkében egy kis és egy nagy lámpa van. A nagy lámpa akkor ég, ha a többség akarja, a kis lámpa pedig akkor, ha csak egy utas kapcsol. Tervezzük meg az áramkört!

Megoldás:

Jelölje x_1, x_2 és x_3 a három kapcsolót, és írjuk fel annak a feltételét, hogy a kis lámpa égjen! A jelölésre itt is alkalmazzuk eddigi megállapodásainkat: ennek alapján a kis lámpa akkor és csak akkor ég, ha

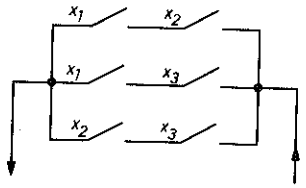
$$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3).$$

A kapott formulának megfelelő áramkört már könnyen lerajzolhatjuk (26. ábra).



26. ábra

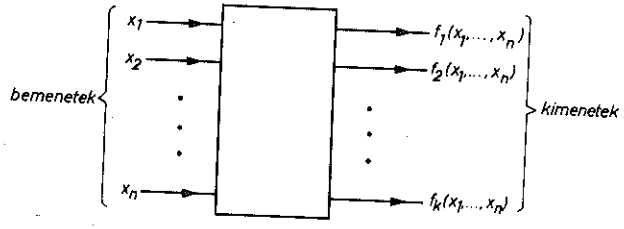
Hasonló módon felírhatjuk annak a feltételét, hogy a nagy lámpa égjen. Ez a feltétel még egyszerűbb is lesz, hiszen nem szükséges például vizsgálnunk, hogy ha x_1 és x_2 bekapcsolt állapotban van, akkor milyen helyzetben van az x_3 jelű kapcsoló (27. ábra).



27. ábra

A kibernetikában a különféle információátalakító eszközöket automatáknak nevezik. Egy ilyen automatának véges sok bemenete (inputja) van, ezek kívülről kapják az információt, és véges sok kimenete (outputja) van, ezek továbbítják az átalakított információt. A matematikai vizsgálat szempontjából feltételezzük, hogy egyszerre, egyidejűleg történik az információ vétele és kibocsátása (a működési időt nem vesszük figyelembe). Azt is feltesszük, hogy a kimeneteken megjelenő információt a bemeneteken belépő információ egyértelműen meghatározza. Az ilyen automatát *determinisztikus automatának* szokták nevezni.

Mi most a determinisztikus automatáknak azzal a speciális típusával foglalkozunk, amelynél egy adott időpontban kilépő információ csak az ugyanekkor belépő információtól függ. Egy ilyen automata sematikus vázlatát a 28. ábrán láthatjuk.



28. ábra

Azt is feltesszük, hogy a bemeneteken is és a kimeneteken is az információ binárisan kódolva jelenik meg, azaz két jól megkülönböztethető állapot – jelöljük az egyiket 0-val, a másikat 1-gyel – hordozza az információt. A 0-t a hamis, az 1-et az igaz jelének is tekinthetjük. A bináris kódolás fizikai megvalósítása a legkézenfekvőbb.

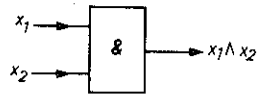
Az elmondottak alapján az automata működését úgy jellemezhetjük, hogy megadjuk a kimeneteken megjelenő információt a bemeneteken megjelenő információ függvényében, azaz megadjuk a kimeneti információt leíró n-változós $f_1, f_2, \ldots, f_k$ függvényeket. Ezek a függvények nyilván igazságfüggvények lesznek, hiszen a változók csak a 0,1 értékeket vehetik fel, és a függvények értéke is csak 0 vagy 1 lehet. Az automata működését tehát k darab n-változós igazságfüggvénnyel írhatjuk le.

Nagyon egyszerű típusú véges automatáknak tekinthetők azok az elektronikus áramköri egységek, amelyek egyes logikai műveleteknek felelnek meg. Ezek közül a leggyakoribbak a következők: a konjunkciónak megfelelő „ÉS kapu (29. ábra), ennek két (esetleg több) bemenete és egy kimenete van, és a kimeneten akkor és csak akkor van impulzus – ezt jelöljük 1-gyel – ha mindegyik bemeneten van impulzus; a diszjunkciónak megfelelő VAGY kapu (30. ábra), ennek két (vagy több) bemenete és egy kimenete van, a kimeneten akkor és csak akkor van impulzus, ha legalább egy bemeneten van impulzus.

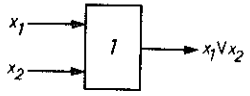
A negációnak megfelelő „inverter" (31. ábra), ennek egy bemenete és egy kimenete van. A kimeneten akkor és csak akkor van impulzus, ha a bemeneten nincs impulzus.

A felsorolt elemeket néha összevontan is alkalmazhatjuk. Például a 32. ábrán látható egység működését így írhatjuk le:

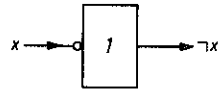
$$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3.$$



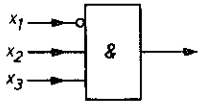
29. ábra



30. ábra



31. ábra

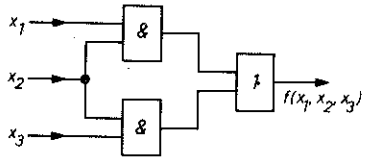


32. ábra

Gyakorló feladatok

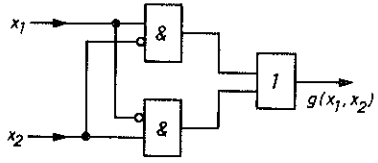
4. Írjuk le formulával a következő elektronikus áramkörök működését:

a)



33. ábra

b)



34. ábra

Megoldás:

a) A kör két ÉS kaput és egy VAGY kaput tartalmaz, az összekapcsolás módja alapján f-re a következő formulát kapjuk:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3).$$

b) A g függvényt így írhatjuk fel:

$$g(x_1, x_2) = (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2).$$

5. Vázoljuk fel a következő formuláknak megfelelő elektronikus áramköröket:

a) $x_1 \oplus x_2$;

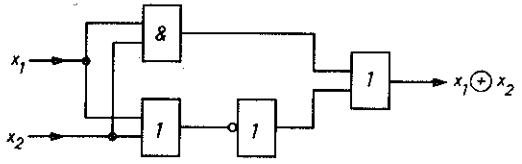
b) $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_2 \wedge x_3)$.

Megoldás:

a) Írjuk át először a $\oplus$ műveletet konjunkció, diszjunkció és negáció segítségével:

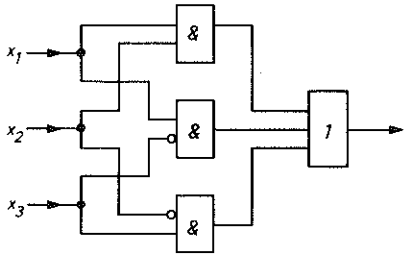
$$x_1 \oplus x_2 = \neg(x_1 \leftrightarrow x_2) = \neg((\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_1)) =$$
$$= (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2) =$$
$$= (x_1 \wedge x_2) \vee \neg(x_1 \vee x_2).$$

Az utoljára kapott formulának megfelelő áramkört már könnyen összeállíthatjuk (35. ábra).



35. ábra

b) A megoldás a 36. ábrán látható.



36. ábra

Az előző gyakorló feladatban tulajdonképpen olyan összetettebb automatát kellett konstruálni a megadott egyszerű automatákból, amelynek egy kimenete van, és a kimeneten megjelenő információ a megadott függvénnyel írható le.

Elég általános feladattípus fogalmazható így: tervezzünk olyan automatát, amely egy adott követelménynek eleget tesz, és az előzőekben ismertetett háromféle elektronikus egységből épül fel.

Gyakorló feladat

6. Tervezzünk olyan véges automatát, amely ÉS, VAGY kapukból, továbbá inverterekből épül fel, két bemenete, két kimenete van, és a kettes számrendszerben összead a következő módon: a két bemeneten megjelenő 0 vagy 1 jelek kettes számrendszerbeli összegét adja ki az egyik kimeneten, és a maradékot a másik kimeneten.

Megoldás:

A tervezendő véges automata – *a bináris félösszeadó* – sematikus rajzát a 37. ábrán vázoltuk fel.

37. ábra

Írjuk fel annak feltételét, hogy az e, ill. az m kimeneten 1 jelenjen meg (legyen impulzus)! Ezt táblázattal így adhatjuk meg:

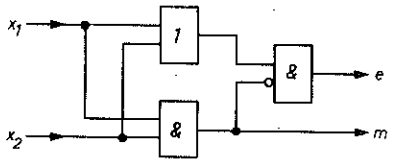
x_1	x_2	e	m
i	i	h	i
i	h	i	h
h	i	i	h
h	h	h	h

Ennek alapján felírhatjuk a kimeneteket mint x_1 és x_2 függvényét:

$$e(x_1, x_2) = (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2) = (x_1 \vee x_2) \wedge \neg(x_1 \wedge x_2),$$

$$m(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2.$$

A félösszeadót most már egyszerűen ábrázolhatjuk (38. ábra).

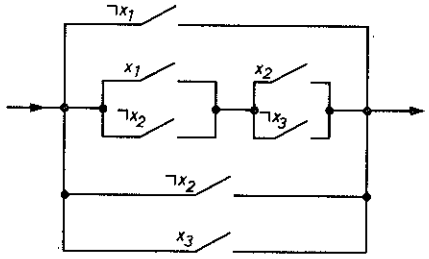


38. ábra

Feladatok

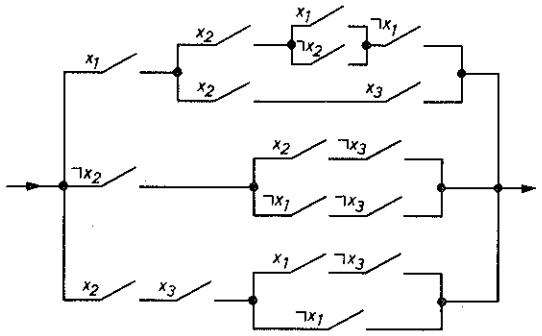
1. Írjuk le a következő áramkörök működését:

a)



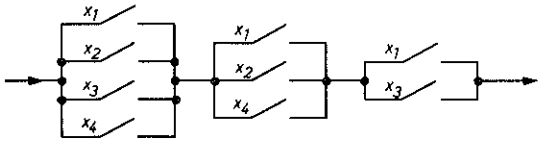
39. ábra

b)



40. ábra

c)



41. ábra

2. Tervezzünk kapcsolókból álló áramkört, amely a következő formuláknak felel meg:

a) $(x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3)$;

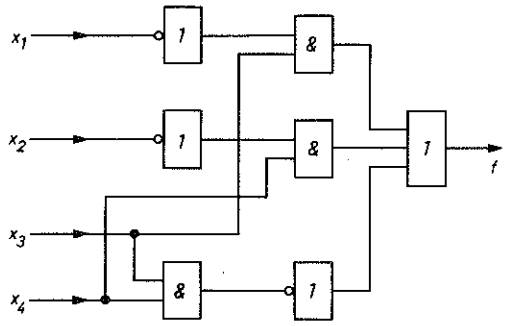
b) $((x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3)$;

c) $x_1 \vee (\neg x_1 \wedge x_3) \vee (\neg x_2 \wedge x_4) \vee \neg(x_3 \wedge x_4)$.

3. Tervezzünk olyan ÉS és VAGY kapukból továbbá inverterekből összeállított áramköröket, amelyek a **2.** *a)*, *b)*, *c)* formuláknak felelnek meg!

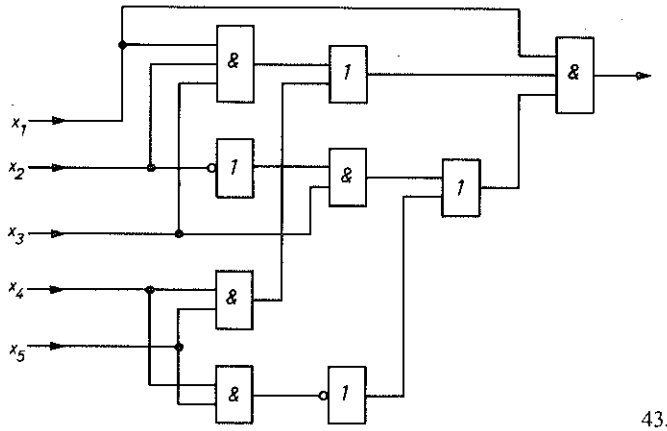
4. Írjuk le formulával a következő elektronikus egységekből felépített áramkört:

a)



42. ábra

b)



43. ábra

5. Tervezzünk

a) kapcsolókból,

b) elektronikus áramköri egységekből olyan áramkört, amelyen akkor és csak akkor folyik áram, ha három kapcsoló (ill. bemenet) közül pontosan kettő működik!

6. Tervezzünk olyan áramkört, amelynek segítségével egy előszobában levő lámpát három különböző kapcsolóval lehet bekapcsolni, méghozzá úgy, hogy bármely kapcsoló elfordításakor a lámpa kigyullad, ha nem égett, és elalszik, ha égett (alternatív kapcsoló)!

2. Minimalizálási módszerek

Az előző fejezetben a logika eszközeit használtuk fel áramkörök tervezésére, leírására. Az eddigi példáinkban nem vizsgáltuk azt a kérdést, hogy az adott célra konstruált áramkör mennyire egyszerű. Lehet-e – és ha igen, milyen módszerekkel – egy adott célra konstruált áramkörrel ekvivalens, egyszerűbb áramkört szerkeszteni? Ez a kérdés pedig – érthető módon – az alkalmazások szempontjából is nagyon lényeges. A következőkben, csak példák bemutatásával ismertetünk néhány olyan eljárást, amelyek ilyen egyszerűsítési feladatok megoldására szolgálnak. Ezeket az eljárásokat minimalizálási módszereknek nevezik.

Gyakorló feladatok

7. Tervezzünk az **1.** feladatban megadott *a), b), c)* áramkörökkel ekvivalens, egyszerűbb áramkört!

Megoldás:

a) Írjuk fel először az áramkör működését jellemző formulát:

$$\neg x_1 \vee ((x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3)) \vee \neg x_2 \vee x_3.$$

A kapott formulát most az ismert azonosságok felhasználásával alakítsuk át úgy, hogy egyszerűbb, de az eredetivel ekvivalens formulát kapjunk! Az „egyszerűbb" itt nyilván azt fogja jelenteni, hogy kevesebb „betűt" tartalmazó formulához akarunk eljutni, hiszen a kapcsolókból összeállított áramkörben minden betűnek megfeleltetünk egy külön kapcsolót.

II. A KIJELENTÉSLOGIKA

1. A logikai műveletek és tulajdonságaik

Példaképpen már vizsgáltunk következtetéseket, ezekben a premisszák és a konklúzió is kijelentés volt. A kijelentések lehetnek igazak vagy hamisak, úgy mondjuk ezt, hogy egy kijelentés *logikai értéke* lehet *igaz* vagy *hamis*. A következőkben olyan kijelentések körében végzett műveleteket fogunk vizsgálni, amelyekben a művelet eredményének logikai értéke csak komponenseinek logikai értékétől függ. Ezeket a műveleteket *logikai műveleteknek* nevezzük. A logikai műveletek tulajdonságainak tanulmányozása megkönnyíti a következtetések vizsgálatát.

A következtetésekben csak a kijelentések szerkezetét fogjuk vizsgálni, a helyes következtetések a bennük szereplő kijelentések szerkezete miatt lesznek helyesek.

A tagadás az egyik legegyszerűbb logikai művelet. Igaz kijelentés tagadása hamis, hamis kijelentés tagadása igaz. A tagadás műveletének matematikai modellje a *negáció* művelete, ezt az i és h logikai értékekből álló halmazon, az $\{i, h\}$ kételemű halmazon értelmezzük. A művelet jelölésére a $\neg$ jelet használjuk, és a műveletet a következőképpen definiáljuk:

(1)

A	$\neg A$
i	h
h	i

Gyakran használjuk azt a logikai műveletet is, amikor két kijelentést az „és" kötőszóval kapcsolunk össze egy kijelentéssé. Például az „öt prímszám és a kilenc négyzetszám" kijelentés az „öt prímszám" és „a kilenc négyzetszám" kijelentésekből keletkezett az „és" művelettel. Mivel mindkét kijelentéskomponens igaz, az összetett kijelentés is igaz. Az „és" művelet használatát végiggondolva azt találjuk, hogy a művelet eredményét pontosan ebben az egy esetben tekintjük igaznak, minden más esetben hamisnak. Ennek megfelelően a művelet matematikai modelljét, a *konjunkciót* a következőképpen definiáljuk az $\{i, h\}$ kételemű halmazon (a művelet jele $\wedge$):

(2)

A	B	$A \wedge B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

Egy további, szintén gyakran használt logikai műveletet a „vagy" kötőszóval fejezünk ki. A „vagy" kötőszót többféle értelemben is használjuk a hétköznapi nyelvben. Ezek közül a matematika számára és logikai szempontból is a *megengedő vagy* használata a legfontosabb: [illegible] szám vagy prímszám, vagy [illegible] tekintjük akkor is, ha a szób[illegible] [illegible] prímszám is, azaz a szám 2. Ennek [illegible]ben a művelet matematikai modelljét a *diszjunkció* (alternációt) (jele: $\vee$) a következő módon definiálhatjuk:

(3)

A	B	$A \vee B$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Gyakorló feladatok

1. Igazoljuk a következő azonosságokat:

a) $A \wedge B = B \wedge A$,
b) $A \vee B = B \vee A$, } Kommutatív
c) $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$,
d) $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$. } asszociatív

Megoldás:

Mindegyik azonosság közvetlenül igazolható úgy, hogy a definiáló értéktáblázatokat elkészítjük, és észrevesszük, hogy a jobb és bal oldalon álló kifejezések értékei sorról sorra megegyeznek. Példaképpen igazoljuk ezzel a módszerrel a *c)* azonosságot:

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge C$	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	h	h	h
i	h	i	h	h	h	h
i	h	h	h	h	h	h
h	i	i	h	h	i	h
h	i	h	h	h	h	h
h	h	i	h	h	h	h
h	h	h	h	h	h	h

A táblázat 5. és 7. oszlopa sorról sorra megegyezik, így a két kifejezés értéke A, B és C minden lehetséges értékére azonos.

Egy másik, szintén jól használható módszer azonosságok igazolására az, amikor megmutatjuk, hogy a bizonyítandó azonosság két oldalán álló kifejezés a változóknak ugyanazokra az értékeire lesz igaz (vagy hamis, mikor melyiket célszerűbb vizsgálni). Igazoljuk például ezzel a módszerrel a *d)* azonosságot. Ebben az esetben a diszjunkció értéktáblázatát megnézve azt látjuk, hogy a művelet eredménye pontosan egy esetben hamis, akkor, amikor mindkét tag hamis. Célszerű ezért azt vizsgálni, hogy milyen esetben vesz fel hamis értéket mindkét oldal. Használjuk a következő rövid jelölést: pl. $|A| = h$ jelöli, hogy A értéke hamis. A bal oldalon álló diszjunkció pontosan akkor hamis, ha mindkét tagja hamis, vagyis $|A \vee B| = h$ és $|C| = h$. Az $|A \vee B| = h$ csak abban az esetben áll fenn, ha $|A| = h$ és $|B| = h$, végeredményben tehát a bal oldal akkor és csak akkor hamis, ha $|A| = |B| = |C| = h$. A jobb oldalon álló diszjunkció értéke csak akkor hamis, ha $|A| = h$ és $|B \vee C| = h$, azaz $|A| = |B| = |C| = h$. Ezzel igazoltuk az azonosságot.

Érdemes megjegyezni, hogy az *a)*, *b)* azonosságok szerint a konjunkció és diszjunkció kommutatív, a *c)* és *d)* azonosságok szerint pedig asszociatív műveletek.

2. Igazoljuk a következő azonosságokat:

a) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,
b) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, } disztributivitás

c) $A \wedge (A \vee B) = A$,
d) $A \vee (A \wedge B) = A$,
e) $A \wedge A = A$,
f) $A \vee A = A$.

Megoldás:

Az *a)* és *b)* azonosságokat disztributivitási szabályoknak nevezzük. Ha $\wedge$ helyett a szorzás jelét, $\vee$ helyett pedig az összeadás jelét írjuk, akkor az *a)* azonosság ilyen alakú:

(4) $\quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$,

a *b)* azonosságot pedig így „fordíthatjuk le":

(5) $\quad A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$.

Ha most A, B, C például valós számokat jelentenek, $\cdot$ és $+$ pedig a valós számok körében értelmezett szorzást és összeadást, akkor a (4) azonosság igaz, de az (5) azonosság nyilván nem. Ez mutatja a lényeges eltérést a számok algebrája és a logikai algebra között.

Igazoljuk a *b)* azonosságot (az *a)* bizonyítása ennek mintájára könnyen elvégezhető). A *b)* azonosság bal oldala akkor és csak akkor hamis, ha $|A| = h$ és B és C közül valam
kor hamis, ha $|A \vee B| = h$, vag
valamelyik hamis.

A *c)* azonosság igazolását i ...odon könnyu e... A bal oldal akkor és csak akkor igaz, ha A igaz (hiszen ekkor $|A \vee B| = i$ is teljesül). Nyilván pontosan ekkor igaz a jobb oldal is.

Hasonlóan igazolható a *d)* azonosság is. A *c)* és *d)* azonosságokat szokás *elnyelési szabályoknak* is hívni.

Még könnyebb az *e)* és az *f)* azonosságok (rövidítési szabály) igazolása; ezek jobb és bal oldala nyilván egyszerre igaz a konjunkció, ill. a diszjunkció definíciója alapján. Ha ismét a $\wedge$ jel helyett $\cdot$ jelet, a $\vee$ jel helyett $+$ jelet képzelünk, akkor ezt a két azonosságot úgy fejezhetjük ki, hogy a logikai algebrában nincs 1-nél nagyobb kitevő, és nincs 1-nél nagyobb együttható sem.

3. Igazoljuk a következő, negációt is tartalmazó azonosságokat:

a) $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$,
b) $\neg(A \vee B) = \neg B \wedge \neg B$,
c) $\neg A \wedge A = h$,
d) $\neg A \vee A = i$,
e) $\neg\neg A = A$.

Megoldás:

Az *a)* azonosság igazolásakor azt érdemes vizsgálni, hogy mikor hamis a két oldal. A bal oldal akkor és csak akkor hamis, ha $|A \wedge B| = i$, azaz A is és B is igaz. A jobb oldal akkor és csak akkor hamis, ha $\neg A$ és $\neg B$ is hamis, azaz A is és B is igaz. Ugyanezzel a módszerrel igazolható a *b)* azonosság is.

Az *a)* és *b)* azonosságot *De Morgan-azonosságoknak* is szokás nevezni.

A *c)* azonosság *az ellentmondásmentesség* logikai *elvét* formalizálja. Azt fejezi ki, hogy egy állítás és a tagadása nem lehet egyszerre igaz. Bizonyítása közvetlenül adódik a negáció és a konjunkció definíciója alapján.

A *d)* azonosság *a harmadik kizárásának* logikai *elvét* fejezi ki; azt, hogy egy állítás és a tagadása közül valamelyik feltétlenül igaz. Az azonosság igazolása a negáció és diszjunkció definíciója alapján nagyon könnyen elvégezhető.

Az *e)* azonosság, a kettős negáció szabálya szintén azonnal igazolható a negáció definíciója alapján.

Az eddig vizsgált három logikai művelet – a negáció, konjunkció és diszjunkció – mellett további két fontos és (különösen a matematikában) nagyon gyakran használt logikai műveletet fogunk most bevezetni: az *implikációt* (kondicionális) és az *ekvivalenciát* (bikondicionális).

Az implikáció logikai művelete a „ha..., akkor..." kötőszavakkal kifejezett állítások körében végzett művelet logikai modellje. Vizsgáljuk meg, hogyan célszerű definiálni az implikációt, ha összhangban akarunk maradni a „ha..., akkor..." nyelvi használatával. A számelméletből tudjuk, hogy a „Ha a osztója b-nek, akkor a osztója bc-nek" összetett állítás igaz. Ezen azt értjük, hogy akármilyen pozitív egész számokat helyettesítünk is a, b és c helyére, az így kapott állítás mindig igaz lesz. Nézzük meg, hogy milyen esetek lehetségesek:

$a=2$, $b=4$, $c=3$; „2 osztója 4-nek" *igaz*,
„2 osztója 3·4-nek" *igaz;*

$a=2$, $b=3$, $c=4$; „2 osztója 3-nak" *hamis*,
„2 osztója 3·4-nek" *igaz;*

$a=2$, $b=3$, $c=5$; „2 osztója 3-nak" *hamis*,
„2 osztója 3·5-nek" *hamis*.

Az összetett állítást mindhárom esetben igaznak kell tekintenünk. Az a negyedik eset, amikor „a osztója b-nek" igaz és „a osztója bc-nek" hamis, nem fordulhat elő, hiszen akkor hamisnak mondanánk az összetett ítéletet.

Az elmondottak alapján az implikációt (jele: $\rightarrow$) a következőképpen definiáljuk:

A	B	$A \rightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Az ekvivalencia az „akkor és csak akkor, ha..." kapcsolattal kifejezett művelet logikai modellje. Az „$a \cdot b = 0$ akkor és csak akkor, ha $a=0$ vagy $b=0$" állítás azt fejezi ki tömör formában, h[illegible] igy hamis. Er[illegible] kai műveletét [illegible]

A	B	$A \leftrightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Gyakorló feladatok

4. Igazoljuk a következő azonosságokat:

a) $A \rightarrow B = \neg A \vee B$,
b) $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$,
c) $(A \wedge B) \rightarrow C = A \rightarrow (B \rightarrow C)$,
d) $A \rightarrow A = i$,
e) $A \leftrightarrow A = i$.